

POSITIVE PERIODISCHE LÖSUNGEN FÜR SEMILINEARE PARABOLISCHE SYSTEME

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
an der Abteilung für Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum

von

Werner Knoke

aus Höxter

Bochum · 1979

POSITIVE PERIODISCHE LÖSUNGEN FÜR SEMILINEARE PARABOLISCHE SYSTEME

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
an der Abteilung für Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum

von

Werner Knoke

aus Höxter

Bochum · 1979



Dissertation eingereicht am 30. 5. 1979

Tag der mündlichen Prüfung 29. 6. 1979

Dekan: Prof. Dr. V. Baumann

Referent: Prof. Dr. H. Amann (Kiel)

Korreferent: Prof. Dr. E. Zehnder

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Abkürzungen, Bezeichnungen und Funktionenräume

Voraussetzungen und Hauptresultate

§ 0. Hilfsmittel aus der Theorie der geordneten Banachräume

§ 1. Grundlegendes über lineare Evolutionsgleichungen

§ 2. Einige Resultate über nichtlineare Störungen

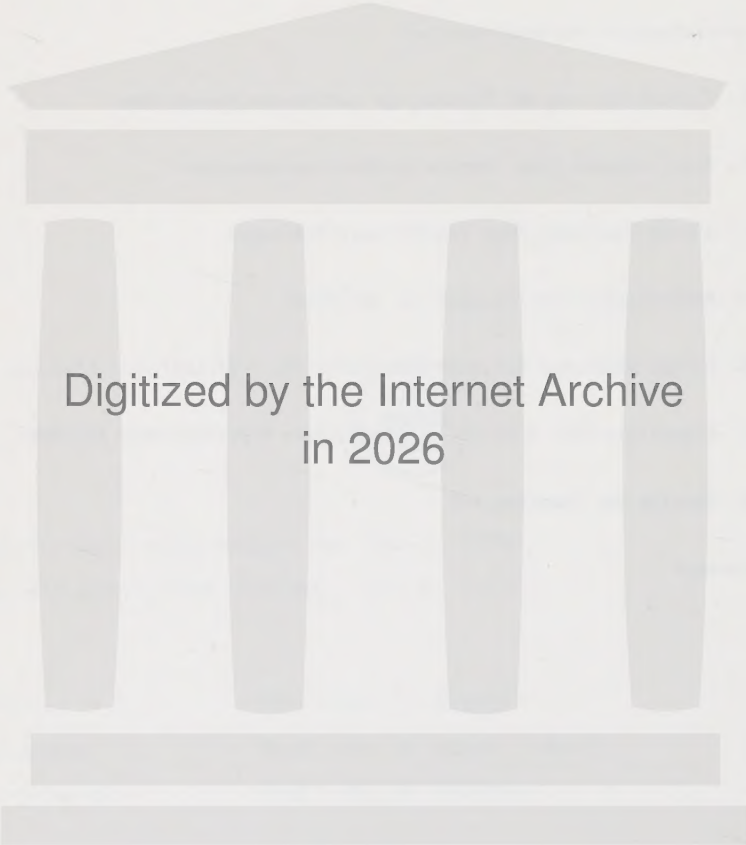
§ 3. Abhängigkeit der Lösungen von den Daten

§ 4. Einige Sätze zur Existenz und Stabilität T -periodischer Lösungen

§ 5. Ergebnisse über Kontinua nichtnegativer T -periodischer Lösungen

§ 6. Beweise der Theoreme 1-9

Literatur



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546403_0020

Einleitung

In dieser Arbeit sollen semilineare parabolische Randwertprobleme der Form

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + A(s, t, D)u &= A_0(s, t)u + \lambda f(s, t, u, Du) \quad \text{in } \Omega \times (0, T] \\ B(s, D)u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0, T] \end{aligned}$$

untersucht werden. Dabei sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^N$ mit hinreichend glattem Rand, $\frac{\partial}{\partial t} + A(s, t, D)$ ein Diagonalsystem von M gleichmäßig parabolischen linearen Differentialoperatoren zweiter Ordnung, B ein Diagonalsystem von M Randoperatoren höchstens erster Ordnung, A_0 eine $M \times M$ -Matrix und f ein (i.a. stark gekoppeltes) System von M nichtlinearen Differentialoperatoren erster Ordnung. Zunächst suchen wir für feste Werte des Parameters $\lambda \in \mathbb{R}_+$ Kriterien für die Existenz nichttrivialer klassischer Lösungen von (1), die im Sinne der Randbedingung

$$(2) \quad u(s, T) = u(s, 0) \quad \forall s \in \bar{\Omega}$$

T -periodisch sind, um anschließend in einem geeigneten " (u, λ) -Raum" globale Kontinua solcher Lösungen zu untersuchen. Unser besonderes Interesse wird dabei den positiven Lösungen von (1), (2) gelten, d.h. denjenigen nichttrivialen Lösungen von (1), (2), deren Komponenten nichtnegativ sind. Dies ist insofern sinnvoll, als Randwertprobleme der Form (1) zusammen mit Periodizitätsbedingungen wie etwa (2) oder mit Anfangsbedingungen vom Typ

$$(3) \quad u(s, 0) = x(s) \quad \forall s \in \bar{\Omega}$$

mit einer vorgegebenen Abbildung $x : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^M$, die gewissen Regularitäts- und Verträglichkeitsbedingungen genügen muß, z.B. bei Diffusionsprozessen in physikalischen, chemischen oder biologischen Modellen auftreten (vgl. [11], [24]) und häufig von Natur aus nichtnegative Größen

wie etwa Maßzahlen für die Größe gewisser biologischer Populationen bei ökologischer Interaktion oder die Konzentration von Gasen oder chemischen Lösungen in einem umgebenden Medium beschreiben. Die vorliegende Arbeit hat jedoch rein analytischen Charakter, und die genannten Beispiele sollen nur der Motivation unserer ausschließlich mathematischen Behandlung des Problems (1) dienen.

Nichtlineare Randwertprobleme der Form (1) sind in den letzten Jahren sehr intensiv studiert worden (vgl. [8-12, 16, 19, 22, 24, 26, 31, 37, 44, 49-51, 54-56]), wobei einige der erwähnten Autoren nur den Spezialfall $M = 1$ behandelten (siehe [10, 19, 22, 26, 31, 37, 44, 49, 54]) und/oder keine Gradientenabhängigkeit für f zuließen ([19, 44, 49, 60]), dafür aber zum Teil quasilineare Gleichungen ([22, 31, 54]) oder nichtlineare Randbedingungen ([19]) untersuchten. Sie benutzten dabei u.a. Variationsmethoden ([22]), endlichdimensionale Galerkin-Approximationen durch Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen ([44]) und Umformulierungen des Problems auf äquivalente Fixpunktgleichungen, die die Anwendung topologischer Techniken - man denke etwa an Fixpunktsätze und Abbildungsgradmethoden - erlauben.

Wir wollen hier nur den zuletzt beschriebenen Zugang diskutieren, der von fast allen der oben erwähnten Autoren gewählt wurde. Zunächst sei bemerkt, daß man im Falle inhomogener Randbedingungen die Gleichungen (1) mit diesen Methoden unmittelbar angehen muß, während es in unserem Falle möglich ist, das Problem (1) zunächst als eine Evolutionsgleichung

$$(1') \quad \dot{u} + A(t)u = g(t, u, \lambda) \quad , \quad t \in (0, T]$$

in einem geeigneten Banachraum X zu formulieren, in dem $A(t)$ als dicht definierter abgeschlossener unbeschränkter Operator eine analytische Halbgruppe erzeugt und für hinreichend großes $\omega > 0$ gebrochene Potenzen $A_\omega^\alpha(t) := (A(t) + \omega \operatorname{id}_X)^\alpha$ besitzt, während g eine nichtlineare

Abbildung ist, die bezüglich der zweiten Variablen für ein $\alpha \in (0,1)$ auf dem Definitionsbereich X_α von $A_\omega^\alpha(0)$ erklärt ist, der - mit der Graphennorm versehen - ein stetig und dicht in X eingebetteter Banachraum ist. Damit den später exakt definierten Lösungsbegriffen jede starke Lösung dieser Evolutionsgleichung eine Lösung der Integralgleichung

$$(4) \quad u(t) = U(t,0)u(0) + \int_0^t U(t,s)g(s,u(s),\lambda)ds =: Q(u,\lambda)(t) \quad \forall t \in [0,T]$$

in $C([0,T],X_\alpha)$ darstellt, wobei mit $U(t,s)$ die zur homogenen Evolutionsgleichung gehörigen Evolutionsoperatoren bezeichnet seien, ist es vernünftig, zur Lösung von (1), (2) bzw. (1), (3) zunächst einmal Lösungen von (4) - sogenannte milde Lösungen der Evolutionsgleichung (1') - zu suchen, die zusätzlich im Sinne der Randbedingung

$$(2') \quad u(T) = u(0)$$

T-periodisch sind bzw. der Anfangsbedingung

$$(3') \quad u(0) = x$$

genügen. Zur Bestimmung T-periodischer milder Lösungen von (1') gibt es wiederum verschiedene Methoden, die hier kurz aufgezeigt seien. Betrachtet man z.B. die Integralgleichung (4) nicht nur für die "Zeit" $t \in [0,T]$, sondern für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ und nimmt einmal heuristisch die Gleichung

$$u(0) = \int_{-\infty}^0 U(0,s)g(s,u(s),\lambda)ds$$

an, die unter geeigneten Voraussetzungen in gewissen Banachräumen von gleichmäßig beschränkten Abbildungen $u: \mathbb{R} \rightarrow X_\alpha$ sinnvoll ist, so ist (4) äquivalent zur Fixpunktgleichung

$$(4') \quad u(t) = \int_{-\infty}^t U(t,s)g(s,u(s),\lambda)ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

und kann dort unter geeigneten Voraussetzungen an g mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes eindeutig gelöst werden. Ist A ferner T-periodisch bzgl. der "Zeitvariablen" t , so gilt $U(t+T,s+T) = U(t,s) \quad \forall s \leq t$ und mit zusätzlich vorausgesetzter T-Periodizität von g bzgl. t erhält man mit dem Transformationssatz sofort, daß mit der gefundenen Lösung u

auch die Abbildung $v(t) = u(t+T)$ eine Lösung von (4') ist. Aus der Eindeutigkeitsaussage des Banach'schen Fixpunktsatzes folgt dann, daß u auch die Bedingung (2') erfüllt. Diese Methode wurde unter einfacheren Voraussetzungen z.B. von C. T. Taam in [55] benutzt, um stabile milde T -periodische Lösungen von (1') nachzuweisen (vgl. [55, Theorem 7-10]).

Ebenso kann (4) (2') natürlich gelöst werden, indem man (2') entweder in den Definitionsbereich von $Q(.,\lambda)$ übernimmt oder unmittelbar in die Gleichung (4) einbaut, d.h. daß man (4) z.B. in

$$E = \{u \in C([0,T], X_\alpha) / u(0) = u(T)\}$$

studiert oder anstelle von (4) die Integralgleichung

$$(4'') \quad u(t) = U(t,0)u(0) + \int_0^T U(t,s)g(s,u,\lambda)ds$$

in $C([0,T], X_\alpha)$ behandelt, eine Idee, die übrigens implizit auch dem in [56] gewählten Zugang zugrundeliegt.

In dieser Arbeit werden wir jedoch keine der bislang beschriebenen Methoden benutzen, sondern auf das Poincaré'sche Prinzip zum Nachweis T -periodischer milder Lösungen von (1') zurückgreifen. Es besteht darin, lediglich Anfangswerte $x = u(0)$ für Lösungen von (4), (2') zu bestimmen, und geht von der eindeutigen Lösbarkeit von (4), (3') aus, was die Definition eines Lösungsoperators S ermöglicht, der einem "Datenpaar" (x,λ) die zugehörige Lösung $u =: S(x,\lambda)$ von (4), (3') zuordnet. Die Fixpunkte des sogenannten Poincaré-Operators $\pi(.,\lambda) := S(.,\lambda)(T)$ sind genau die Anfangswerte der gesuchten Lösungen von (4), (2'). Daß dieser Operator in geeigneten Räumen nicht nur vollständig ist, sondern auch gewisse durch das Maximumprinzip für parabolische Differentialgleichungen induzierte Positivitätseigenschaften besitzt, die ihn besonders dafür geeignet erscheinen lassen, die Fixpunktgleichung

$$(5) \quad \pi(x,\lambda) = x$$

in geordneten Banachräumen zu studieren, ist wohl schon lange bekannt und wurde zum ersten Male von Ju. Kolesov in [31] für $M = 1$ und Dirichlet-Randbedingungen dazu benutzt, die Existenz T-periodischer Lösungen von (1) nachzuweisen. Während Kolesov keine Gradientenabhängigkeit von f zuließ und eine durch die Wahl des zugrundegelegten Raumes $C(\bar{\Omega})$, in dem er (5) untersuchte, nötig erscheinende etwas "unnatürliche" Wachstumsbedingung an $D_{\xi}f$ voraussetzte (vgl. [31, (15)]), konnte sich H. Amann, der das Problem später in [10] aufgriff, von dieser Bedingung befreien, indem er (5) in $C^{2+\mu}(\bar{\Omega})$ behandelte. Er löste (1), (2) und (1), (3) sogar für gradientenabhängige Nichtlinearitäten mit quadratischem Wachstum (vgl. Addendum [10]), indem er sich durch die Vorgabe von Unter- und Oberlösungen eine a priori-Abschätzung in $C(\bar{\Omega})$ verschaffte. Derartige Ergebnisse wurden in letzter Zeit auch für Systeme (und für elliptische Gleichungen) bewiesen, indem anstelle von Unter- und Oberlösungen die Existenz einer beschränkten invarianten Menge $ID \subset \mathbb{R}^M$ vorausgesetzt wurde (vgl. [56, 9, 12, 16, 53]).

Auch in der vorliegenden Arbeit werden Methoden benutzt, mit denen man derartige Resultate erhält. Da es jedoch unser Hauptziel ist, einige der für elliptische Gleichungen bekannten Ergebnisse über positive Lösungen, wie sie etwa in den Arbeiten [3], [6] und [7] enthalten sind, auf das Problem (1), (2) zu übertragen ohne die Existenz derartiger beschränkter invarianter Mengen vorauszusetzen, werden wir zumeist unter erheblich einschränkenderen Wachstumsbedingungen arbeiten müssen, um die Existenz des Poincaré-Operators auf einer unbeschränkten Menge wie z.B. dem positiven Kegel eines Funktionenraumes zu gewährleisten. In diese Richtung gingen auch einige der bereits erwähnten Resultate in [10] und [31], wo jedoch weder Systeme noch parameterabhängige Gleichungen betrachtet wurden. Sie werden sich als Spezialfälle aus unseren Resultaten ergeben.

Die Tatsache, daß wir unsere Ergebnisse aus allgemeineren Aussagen über Evolutionsgleichungen herleiten, hat den Vorteil, daß der abstrakte Zugang die zugrundeliegenden Strukturen besser hervortreten läßt und Anwendungen auf andere Probleme ermöglicht. So kann man etwa im Bereich der gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Hilfe unserer Theorie sowohl einige ältere Sätze von M. A. Krasnosel'skii aus [34] wiedergewinnen als auch neue Sätze, z.B. Multiplizitätsaussagen für parameterabhängige Gleichungen, beweisen. Wir werden jedoch hier nur Anwendungen auf das (interessantere und schwierigere) Problem (1), (2) diskutieren. Auf der anderen Seite macht die abstrakte Behandlung des Problems leider sehr viele technische Hilfsaussagen erforderlich, die zum großen Teil für den Umfang dieser Arbeit verantwortlich sind.

Um die Ergebnisse ein wenig übersichtlicher zu machen, haben wir die wichtigsten Anwendungen auf das Problem (1), (2) ohne Beweis an den Anfang gestellt. Die Beweise werden in § 6., dem letzten Abschnitt dieser Arbeit, nachgeliefert. Der Formulierung dieser Hauptresultate folgen in einem Paragraphen 0. die benötigten Hilfsmittel aus der Theorie der geordneten Banachräume, während die Paragraphen 1-3 die bereits erwähnten technischen Hilfsaussagen enthalten, von denen Lemma 1.11, Lemma 1.13, Theorem 2.7, Lemma 2.8 und die mit "Satz" bezeichneten Aussagen des Paragraphen 3 hervorgehoben seien. In den sich anschließenden Paragraphen 4 und 5 werden Sätze für Existenz, Nichtexistenz und Stabilität T-periodischer milder Lösungen nichtlinearer Evolutionsgleichungen bewiesen. Da mit den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln der Beweis der Existenz- und Nichtexistenzsätze des Paragraphen 4 trivial ist, sei hier lediglich auf den Stabilitätssatz 4.9 aufmerksam gemacht, der in dieser Allgemeinheit neu zu sein scheint. Neu sind offenbar auch die Ergebnisse des Paragraphen 5, da globale Kontinua nichtnegativer T-periodischer milder

Lösungen nichtlinearer Evolutionsgleichungen bislang überhaupt nicht untersucht worden sind. Besonders hervorzuheben sind die Vielfachheitsaussagen von Theorem 5.12 und Satz 5.14.

Schließlich richtet sich mein besonderer Dank an Herrn Prof. Dr. H. Amann, der das Thema dieser Arbeit vorschlug und dessen reges Interesse während der Abschnitte der Fertigstellung für mich ein ständiger Ansporn war.

Abkürzungen, Bezeichnungen und Funktionenräume

1. Abkürzungen und Bezeichnungen

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$	natürliche Zahlen (mit 0)
$\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$	positive natürliche Zahlen
$\mathbb{R} :=$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+ :=$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+^* := \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$	positive reelle Zahlen
$\mathbb{C} :=$	Menge der komplexen Zahlen
$BR :=$	Banachraum
$cl_X A := \bar{A} :=$	abgeschlossene Hülle der Menge A im topologischen Raum X
$int_X A := A^\circ :=$	Inneres von A im topologischen Raum X
$span_X A :=$	lineare Hülle der Teilmenge A eines linearen Raumes
$(\overline{B})_X :=$	offene (bzw. abgeschlossene) Einheitskugel im $BR \ X$
$\$ _X :=$	Einheitssphäre im $BR \ X$
$id_X :=$	identische Abbildung einer Menge X in sich
$1_X :=$	Abbildung einer Menge X auf die Menge $\{1\}$
(Falls keine Mißverständnisse zu befürchten sind, lassen wir den Index X in den letzten sieben Bezeichnungen weg.)	
$(\overline{B})^N := (\overline{B})_{\mathbb{R}^N}, \quad \$^{N-1} := \$_{\mathbb{R}^N}$	
$e_i^N :=$	i -ter Einheitsvektor im $\mathbb{R}^N$
$meas :=$	Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^N$
$D(f) :=$	Definitionsbereich der Abbildung f
$f _M :=$	Restriktion der Abbildung f auf eine Teilmenge M von $D(f)$
$supp f := cl_{\mathbb{R}^N} \{s \in A / f(s) \neq 0\}$	Träger einer auf einer Teilmenge A des $\mathbb{R}^N$ definierten Abbildung f mit Werten in einem linearen Raum

$\mathcal{L}(X, Y) :=$ Raum der stetigen linearen Operatoren des Fréchetraumes X in den Fréchetraum Y (mit der üblichen gleichmäßigen Operator-topologie, falls X und Y normierte Räume sind)

$\mathcal{K}(X, Y) := \{T \in \mathcal{L}(X, Y) \mid T \text{ kompakt}\}$

$\mathcal{M}(X) := \mathcal{M}(X, X)$ für $\mathcal{M} = \mathcal{L}, \mathcal{K}$

$\sigma(A) :=$ Spektrum des abgeschlossenen linearen Operators A , wobei A im Falle eines reellen Raumes mit der Komplexifizierung von A (vgl. [, Chap. II § 11]) identifiziert werde

$\sigma_p(A) :=$ Punktspektrum von A (A wie oben)

$\rho(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ Resolventenmenge von A (A wie oben)

$R(\lambda; A) := (\lambda \text{ id} - A)^{-1}$ Resolvente von A in $\lambda \in \rho(A)$

$X \xrightarrow{(d)} Y : \hookrightarrow$ Der topologische Raum X ist stetig (und dicht) in den topologischen Raum Y eingebettet

$X \xrightarrow{(d)} Y : \hookrightarrow$ $X \xrightarrow{(d)} Y$ mit kompakter Einbettung

$D_i u :=$ i -te partielle Ableitung von u

$D^\alpha u := D_1^{\alpha_1} \dots D_N^{\alpha_N} u$ für $\alpha \in \mathbb{N}^N$ ($D_i^0 u := u$) α -te partielle Ableitung von u

$|\alpha| := \sum_{i=1}^N \alpha_i$ für $\alpha \in \mathbb{N}^N$

χ_A charakteristische Funktion der Menge A .

2. Funktionenräume

Im folgenden sei E ein BR und $N \in \mathbb{N}^*$. Für eine Lebesgue-meßbare nichtleere Teilmenge A des $\mathbb{R}^N$ und $1 \leq p \leq \infty$ bezeichnen wir mit $L_p(A, E)$ den BR der Äquivalenzklassen stark meßbarer Abbildungen $x : A \rightarrow E$, für die die Norm

$$\|x\|_{L_p(A,E)} := \begin{cases} \left(\int_A \|x(s)\|_E^p ds \right)^{1/p}, & \text{falls } p < \infty \\ \inf \{c > 0 \mid \text{meas}\{s \in A \mid \|x(s)\|_E > c\} = 0\}, & \text{falls } p = \infty \end{cases}$$

endlich ist. Ist Ω eine nichtleere offene Teilmenge des $\mathbb{R}^N$, so seien für $k \in \mathbb{N}^*$ die Sobolevräume

$$W_p^k(\Omega, E) := \{x \in L_p(\Omega, E) \mid D^\alpha x \in L_p(\Omega, E) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ mit } |\alpha| \leq k\}$$

definiert, wobei die Differentiation D^α natürlich im distributionellen Sinne zu verstehen ist. Mit der Norm

$$\|x\|_{W_p^k(\Omega, E)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha x\|_{L_p(\Omega, E)}^p \right)^{1/p}$$

sind diese Räume bekanntlich vollständig. Für einen topologischen Raum A bezeichnen wir den linearen Raum aller stetigen Abbildungen von A nach E mit $C(A, E)$. Falls A ein kompakter Hausdorff-Raum ist, wird $C(A, E)$ durch die Norm

$$\|x\|_{C(A, E)} := \sup_{s \in A} \|x(s)\|_E$$

zu einem BR.

Ist (A, d) ein metrischer Raum und $\mu \in (0, 1]$, so nennen wir eine Abbildung $x \in C(A, E)$ gleichmäßig μ -Hölderstetig auf A , falls die Hölderkonstante

$$H_\mu^{A, E}(x) := \sup_{\substack{s, t \in A \\ s \neq t}} \frac{\|x(s) - x(t)\|_E}{d(s, t)^\mu}$$

endlich ist. Die Abbildung heißt gleichmäßig Lipschitzstetig, falls der Hölderexponent $\mu = 1$ ist. Den Raum der (lokal) μ -Hölderstetigen (bzw. Lipschitzstetigen), d.h. auf jeder beschränkten Teilmenge von A gleichmäßig μ -Hölder- (bzw. Lipschitz-) stetigen Abbildungen bezeichnen wir für $\mu \in (0, 1)$ mit $C^\mu(A, E)$ (bzw. $C^{1-}(A, E)$). Ist A ein kompakter metrischer Raum und versehen wir $C^\mu(A, E)$ für $\mu \in (0, 1) \cup \{1-\}$ mit der Norm

$$\|x\|_{C^\mu(A, E)} := \|x\|_{C(A, E)} + H_\mu^{A, E}(x),$$

wobei $H_{1-}^{A,E} := H_1^{A,E}$ gesetzt werde, so ist dieser Raum vollständig.

Wir betrachten nun eine nichtleere beschränkte offene Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^N$. Für $k \in \mathbb{N}$ ist der Raum

$C^k(\overline{\Omega}, E) := \{x \in C(\overline{\Omega}, E) / x \text{ besitzt für } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ mit } |\alpha| \leq k \text{ gleichmäßig stetige Ableitungen } D^\alpha x \text{ in } \Omega\}$

mit der Norm

$$\|x\|_{C^k(\overline{\Omega}, E)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha x\|_{C(\overline{\Omega}, E)}$$

ein BR. Ebenso ist für $\mu \in (0, 1) \cup \{1\}$

$$C^{k+\mu}(\overline{\Omega}, E) := \{x \in C^k(\overline{\Omega}, E) / D^\alpha x \in C^\mu(\overline{\Omega}, E) \quad \forall \quad |\alpha| = k\}$$

bezüglich der Norm

$$\|x\|_{C^{k+\mu}(\overline{\Omega}, E)} := \|x\|_{C^k(\overline{\Omega}, E)} + \sum_{|\alpha| = k} H_{\mu}^{\overline{\Omega}, E}(D^\alpha x)$$

vollständig. Ist $Q \subset \mathbb{R}^{N+1}$ offen, beschränkt und nichtleer, so können

wir jeden Punkt aus Q in der Form (s, t) mit $s \in \mathbb{R}^N$ und $t \in \mathbb{R}$

schreiben. Dabei bezeichnen wir s als die Raum- und t als die Zeit-

variable. Schreiben wir für $(\alpha, j) \in \mathbb{N}^{N+1}$ und $(s, t) \in Q$ die α -te

partielle Differentiation nach s als D_s^α und die j -te partielle Diffe-

rentiation nach t als D_t^j , so ist für $k \in \mathbb{N}$ der Raum

$$C^{(k)}(\overline{Q}, E) := \{u \in C(\overline{Q}, E) / u \text{ besitzt für } (\alpha, j) \in \mathbb{N}^{N+1} \text{ mit } |\alpha| + 2j \leq k$$

gleichmäßig stetige Ableitungen $D_s^\alpha D_t^j u \text{ in } Q\}$

mit der Norm

$$\|u\|_{C^{(k)}(\overline{Q}, E)} := \sum_{|\alpha| + 2j \leq k} \|D_s^\alpha D_t^j u\|_{C(\overline{Q}, E)}$$

ein BR.

Für $k \in \mathbb{N}$, $\mu \in (0, 1)$ und $u \in C(\overline{Q}, E)$ setzen wir nun

$$H_{\mu, s}^{\overline{Q}, E}(u) := \sup_{\substack{(s_1, t) \in \overline{Q} \\ s_2 \neq s_1}} \frac{\|u(s_2, t) - u(s_1, t)\|_E}{|s_2 - s_1|^\mu}$$

und

$$H_{\mu, t}^{\overline{Q}, E}(u) := \sup_{\substack{(s, t_1) \in \overline{Q} \\ t_2 \neq t_1}} \frac{\|u(s, t_2) - u(s, t_1)\|_E}{|t_2 - t_1|^\mu}$$

und bezeichnen mit $C^{(k+\mu)}(\overline{Q}, E)$ den BR aller Abbildungen $u \in C^{(k)}(\overline{Q}, E)$, für die die Norm

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{(k+\mu)}(\overline{Q}, E)} &:= \|u\|_{C^{(k)}(\overline{Q}, E)} + \sum_{|\alpha|+2j = k-1} H_{1+\mu}^{\overline{Q}, E}(D_s^\alpha D_t^j u) \\ &+ \sum_{|\alpha|+2j = k} [H_{\mu, s}^{\overline{Q}, E}(D_s^\alpha D_t^j u) + H_{\mu, t}^{\overline{Q}, E}(D_s^\alpha D_t^j u)] \end{aligned}$$

endlich ist.

Es sei nun A eine beliebige Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ (bzw. $\mathbb{R}^{N+1}$), für die es eine Folge nichtleerer offener und beschränkter Teilmengen U_j von $\mathbb{R}^N$ (bzw. $\mathbb{R}^{N+1}$) gibt derart, daß sich A als Vereinigung der Mengen $A_j := \text{cl}_{\mathbb{R}^{N+1}} U_j$ darstellen läßt.

Für $k \in \mathbb{N}$ und $\mu \in [0, 1) \cup \{1\}$ bezeichnen wir mit $C^{k+\mu}(A, E)$ (bzw. $C^{(k+\mu)}(A, E)$) den Raum derjenigen Abbildungen $u \in C(A, E)$, die für alle $j \in \mathbb{N}$ der Bedingung

$$u|_{A_j} \in C^{k+\mu}(A_j, E) \quad (\text{bzw. } C^{(k+\mu)}(A_j, E))$$

genügen. Mit der durch das Seminormensystem

$$p_j := \|\cdot\|_{C^{k+\mu}(A_j, E)} \quad (\text{bzw. } \|\cdot\|_{C^{(k+\mu)}(A_j, E)})$$

erzeugten Topologie ist $C^{k+\mu}(A, E)$ (bzw. $C^{(k+\mu)}(A, E)$) ein Fréchetraum.

Wir setzen ferner

$$C^\infty(A, E) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(A, E).$$

Ist A insbesondere eine beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^{N+1}$, die den obigen Bedingungen genügt, und gilt $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, so machen wir den Raum $C^{(k+1)}(A, E) \cap C^{(k)}(\overline{A}, E)$ durch das Normensystem

$$\|\cdot\|_{C^{(k+1)}(A_j, E)} + \|\cdot\|_{C^{(k)}(\overline{A}, E)}, \quad j \in \mathbb{N},$$

zu einem Fréchetraum.

Wollen wir für einen der bislang definierten Räume stetiger oder differenzierbarer Abbildungen den Teilraum derjenigen Funktionen bezeichnen, deren Träger kompakt in $\mathbb{R}^{N(+1)}$ und in A enthalten ist, so fügen wir eine Null als Index hinzu. Im Falle $E = \mathbb{R}$ lassen wir bei allen Räumen das "E" einfach weg. So ist für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ z.B.

$$C_0^k(A) = \{u \in C^k(A, \mathbb{R}) / \text{supp } u \text{ kompakt in } \mathbb{R}^{N(+1)}, \text{supp } u \subset A\}.$$

Ist M eine nichtleere Teilmenge von E und wollen wir für einen Teilraum von $L_1(A, E)$ diejenige Teilmenge beschreiben, für deren Elemente x

$$x(s) \in M \quad \text{f.f.a.} \quad s \in A$$

gilt, so ersetzen wir in der Schreibweise den Bildraum E einfach durch M . Es ist also für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ z.B.

$$C^k(A, M) = \{x \in C^k(A, E) / x(A) \subset M\}.$$

Für $k \in \mathbb{N}$, $\mu \in [0, 1) \cup \{1\}$ und ein nichtleeres Gebiet Ω des $\mathbb{R}^N$ sagen wir, Ω sei von der Klasse $C^{k+\mu}$, falls es zu jedem $s \in \partial\Omega$ eine offene Umgebung U von s und eine bijektive Abbildung $\phi \in C^{k+\mu}(U, \mathbb{B}^N)$ mit $\phi^{-1} \in C^{k+\mu}(\mathbb{B}^N, U)$ (d.h. ϕ $C^{k+\mu}$ -Diffeomorphismus) gibt mit

$$\phi(U \cap \Omega) = \{r \in \mathbb{B}^N / r_N > 0\}$$

und

$$\phi(U \cap \partial\Omega) = \mathbb{B}^{N-1} \times \{0\}.$$

Jedes solche Paar (U, ϕ) heißt lokales Koordinatensystem (in s).

Mit $C^{k+\mu}(\partial\Omega, E)$ bezeichnen wir den Raum derjenigen Abbildungen $x : \partial\Omega \rightarrow E$, die für jedes lokale Koordinatensystem (U, ϕ) der Bedingung $x \circ \phi^{-1} \in C^{k+\mu}(\mathbb{B}^N, E)$ genügen.

Ist (E, P) ein geordneter Banachraum (vgl. § 0.), so können wir auf jedem der hier definierten Räume $\mathcal{F}$ von Abbildungen einer Teilmenge A des $\mathbb{R}^{N(+1)}$ nach E für $x, y \in \mathcal{F}$ durch

$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad (y-x)(s) \in P \quad \text{f.f.a.} \quad s \in A$$

eine Ordnungsrelation definieren. Die Menge $\mathcal{F}_+ := \{x \in \mathcal{F} / 0 \leq x\}$ ist im

Sinne von § 0. ein Kegel, der diese Ordnung auf $\mathcal{F}$ erzeugt. In Übereinstimmung mit der Bezeichnungsweise in § 0. nennen wir die Abbildungen aus $\mathcal{F}_+$ *nichtnegativ*, während wir alle nichttrivialen nichtnegativen Abbildungen als *positiv* bezeichnen. Ist I ein nichtleeres Intervall und $f: I \rightarrow \mathcal{F}$ eine ordnungserhaltende Abbildung (d.h. $f(\lambda_1) \leq f(\lambda_2)$ für alle $\lambda_1 \in I$ mit $\lambda_1 < \lambda_2$), so nennen wir f *wachsend*.

Voraussetzungen und Hauptresultate

Es sei $\mu \in (0,1)$, $N \in \mathbb{N}^*$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein nichtleeres beschränktes Gebiet der Klasse $C^{1+\mu}_0$. Für eine feste Zahl $T > 0$ und $0 \leq \tau < T' \leq T$ definieren wir

$$Q_{\tau T'} := \overline{\Omega} \times (\tau, T'] \quad , \quad Q_{T'} := Q_{0 T'} \quad ,$$

und es seien für $M \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq m, n \leq M$ und $1 \leq i, j \leq N$ Abbildungen

$$a_{ij}^m, a_i^m, a_o^{mn} \in C^{(\mu_0)}(\overline{Q_{T'}}), b_o^m \in C^{1+\mu_0}(\partial\Omega), \beta^m \in C^{1+\mu_0}(\partial\Omega, \mathbb{R}^N)$$

und Zahlen $\delta_m \in \{0,1\}$ mit $b_o^m = 1$ für $\delta_m = 0$ gegeben derart, daß

$$(s,t) \in \overline{Q_{T'}} \quad \inf_{\substack{\sum_{i,j=1}^N a_{ij}^m(s,t) \xi_i \xi_j > 0 \\ \xi \in \mathbb{S}^{N-1}}} a_{ij}^m(s,t) \xi_i \xi_j > 0 \quad , \quad a_{ij}^m = a_{ji}^m$$

gelte und β^m ein nach außen gerichtetes, nirgends tangentiales Vektorfeld auf

$\partial\Omega$ sei. Für $1 \leq m \leq M$ seien die skalaren Differentialoperatoren

$$A^m(s,t,D) := - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^m(s,t) D_i D_j + \sum_{i=1}^N a_i^m(s,t) D_i$$

und Randoperatoren

$$B^m(s,D) := b_o^m(s) + \delta_m \frac{\partial}{\partial \beta^m}$$

erklärt. Für Funktionen $g_{ij} \in C(\overline{Q_{T'}})$, $1 \leq i, j \leq M$, bezeichnen wir diejenige Matrix,

die entsteht, wenn man in $G := (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq M}$ alle Elemente außerhalb der Diagona-

le von G durch Null ersetzt, mit $\text{diag } G$ und setzen $A_o := (a_o^{mn})_{1 \leq m, n \leq M}$.

Es sei ID eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^M$, für die mindestens

eine der folgenden Bedingungen (i) $ID = \mathbb{R}^M$, (ii) $ID = \mathbb{R}_+^M$, $A_o \geq \text{diag } A_o^{(1)}$

oder (iii) $0 \in ID$, $(A^m, B^m) = (A^1, B^1) \quad \forall 1 \leq m \leq M$, $A_o = a_o^{11} \text{ id}_{\mathbb{R}^M}$ und $a_o^{11} \leq 0 \leq b_o^1$

erfüllt sei. Für $u: Q_T \rightarrow \mathbb{R}^M$ definieren wir nun die linearen Diagonaloperatoren

$$A(.,.,D)u := (A^1(.,.,D)u_1, \dots, A^M(.,.,D)u_M)$$

$$\text{und } B(.,D)u := (B^1(.,D)u_1, \dots, B^M(.,D)u_M)$$

und fassen die bisherigen Vereinbarungen zur *Voraussetzung (A1)* zusammen.

Daneben betrachten wir die Bedingungen

$$(A2) \quad \left\{ \begin{array}{l} f \in C(\overline{Q_T} \times ID \times (\mathbb{R}^M)^N, \mathbb{R}^M) \\ \sup_{\substack{(s_1, t_1) \in \overline{Q_{T'}}, (s_1, t_1) \neq (s_2, t_2) \\ (\xi, \eta) \in [ID \times (\mathbb{R}^M)^N] \cap B^1(\mathbb{R}^M)^{N+1}}} \frac{|f(s_2, t_2, \xi, \eta) - f(s_1, t_1, \xi, \eta)|}{|s_2 - s_1|^{\mu_0} + |t_2 - t_1|^{\mu_0/2}} < \infty \quad \forall \epsilon \in (0, T) \quad , \\ \forall \rho > 0 \end{array} \right.$$

und

1) In § 0. werden wir solche Abbildungen als quasipositiv definieren.

$$(A3) \quad \sup_{\substack{(s,t) \in \overline{Q_T} \\ (\xi_1, \eta_1) \in [ID \times (IR^M)^N] \cap \partial \overline{B} \\ (\xi_1, \eta_1) \neq (\xi_2, \eta_2)}} \frac{|f(s,t,\xi_2,\eta_2) - f(s,t,\xi_1,\eta_1)|}{|(\xi_2 - \xi_1, \eta_2 - \eta_1)|} < \infty \quad \forall p > 0$$

Mit Hilfe des für $\xi \in ID$ definierten *Normalenkeiles*

$$N(\xi) := \{v \in IR^M \mid (v | \xi - \xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in ID\},$$

der zum Nullpunkt ausartet, falls ξ ein innerer Punkt von ID ist, formulieren wir die folgende Tangentialbedingung an f

$$(A4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Für alle } (s,t,\xi,\eta) \in \Omega \times [0,T] \times \partial ID \times (IR^M)^N \text{ mit} \\ \eta = (\eta^1, \dots, \eta^N) \text{ und} \\ (v | \eta^j) = 0 \quad \forall v \in N(\xi), \quad \forall 1 \leq j \leq N \\ \text{gelte} \\ (v | f(s,t,\xi,\eta)) \leq 0 \quad \forall v \in N(\xi) \end{array} \right.$$

Im folgenden werden wir für $0 \leq \tau < T' \leq T$ und einen beliebigen BR E jede Vektorfunktion $u : Q_{\tau T'} \rightarrow E$ mit der durch $u(t)(s) := u(s,t)$ definierten Abbildung $u : (\tau, T'] \rightarrow E^{\overline{\Omega}}$ identifizieren und die Abkürzungen

$$S_{\tau T'} := \partial \Omega \times (\tau, T'] \quad , \quad S_{T'} := S_{0 T'}$$

benutzen. Zu vorgegebenem $x \in C(\overline{\Omega}, ID)$ und $\lambda \in IR_+$ betrachten wir nun das *Anfangsrandwertproblem*

$$(ARWP)_{x,\lambda} \quad \left\{ \begin{array}{ll} u_t + A(.,.,D)u = A_0 u + \lambda f(.,.,u,Du) & \text{in } Q_T \\ B(.,D)u = 0 & \text{auf } S_T \\ u(0) = x & \text{auf } \overline{\Omega} \end{array} \right.$$

und nennen für $T' \in (0,T)$ jede Abbildung $u \in C^{(2)}(Q_{T'}, IR^M) \cap C^{(1)}(\overline{Q_{T'}}, ID)$, die $(ARWP)_{x,\lambda}$ mit T' anstelle von T punktweise erfüllt, eine *lokale (reguläre) Lösung* von $(ARWP)_{x,\lambda}$, während u im Falle $T' = T$ *globale reguläre Lösung* von $(ARWP)_{x,\lambda}$ heißt.

Für $\lambda = 1$ bezeichnen wir $(ARWP)_{x,\lambda}$ kurz mit $(ARWP)_x$. Führen wir für Funktionenräume $E \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega}, IR^M)$ die Teilräume

$$E_B := \{x \in E \mid B(\cdot, D)x = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$$

ein, so können wir den folgenden lokalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz formulieren.

Theorem 1:

Unter den Voraussetzungen (A1)-(A4) besitzt $(ARWP)_x$ für alle $x \in C_B^2(\bar{\Omega}, ID)$ eine bis auf Fortsetzungen eindeutig bestimmte lokale reguläre Lösung $u \in C^{(2+\mu)_0}_{(Q_T, \mathbb{R}^M)}$. Falls u nicht zu einer globalen Lösung fortgesetzt werden kann und $T^* \in (0, T]$ die größte Zahl ist, für die u zu einer lokalen Lösung von $(ARWP)_x$ auf Q_T , für alle $T' \in (0, T^*)$ fortgesetzt werden kann, so gilt

$$\limsup_{t \rightarrow T^*-} \|u(t)\|_{C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M)} = \infty.$$

Dieser Satz ist eine lokale Version von [9 , Theorem 1]. Wir haben jedoch die dort vorausgesetzte Bedingung (Tg) durch die einfacher nachzuprüfende Voraussetzung (A4) ersetzt, unbeschränkte Mengen ID zugelassen und auch die weiteren Voraussetzungen an ID und A_0 abgeschwächt (in [9] wird nur der Fall (iii) behandelt). Auf der anderen Seite enthält er nur eine lokale Existenzaussage, da wir keine der in [9] geforderten Wachstumsbedingungen (G1) oder (G2) vorausgesetzt haben. Mit unseren Methoden können wir jedoch auch zeigen, daß u sich für beschränktes ID unter der Voraussetzung (G1) zu einer globalen Lösung fortsetzen läßt. Das gleiche gilt für beliebiges ID , wenn wir die einschränkendere Wachstumsbedingung

$$(A5) \quad \sup_{(s,t,\xi,\eta) \in \bar{Q}_T \times ID \times (\mathbb{R}^M)^N} \frac{|f(s,t,\xi,\eta)|}{1+|(\xi,\eta)|} < \infty$$

verlangen.

Falls unser betrachtetes System bezüglich der Gradienten ∇u_i gekoppelt ist, so nennen wir f und $(ARWP)_{x,\lambda}$ *stark gekoppelt*; liegt Kopplung nur bezüglich der nichtdifferenzierten Terme vor, so sagen wir, $(ARWP)_{x,\lambda}$ und f seien *schwach gekoppelt*. Schließlich heißen A_0 , f und $(ARWP)_{x,\lambda}$ *entkoppelt*, falls die i -te Gleichung außer u_i und ∇u_i keine der Komponenten von u und deren Gradienten enthält.

Unsere Bedingung (A4) ähnelt sehr einer Voraussetzung, die R. Redheffer und W. Walter in [50] benutzten, um die Invarianz einer Menge ID bezüglich eines stark gekoppelten parabolischen Systems nachzuweisen, und die J.W. Bebernes und K. Schmitt in [12, Theorem 4] zum Beweis von Theorem 1 für beschränktes ID und Dirichlet-Randbedingungen verwandten, während K. Schmitt mit ihrer Hilfe in [53, Corollary 2.5] ebenfalls für beschränktes ID die Existenz von Lösungen stark gekoppelter elliptischer Systeme bewies (vgl. auch [60], [16]). Da alle erwähnten Autoren diese Bedingung jedoch für eine größere Menge von η 's in $(\mathbb{R}^M)^N$ als wir verlangen, ist (A4) ein wenig allgemeiner. Dies sei an einem elementaren Beispiel illustriert:

Nehmen wir an, es sei $M = 2$ und $ID = \mathbb{R}_+ \times \{0\}$. Dann genügt f der Voraussetzung (A4), falls für $(s,t) \in \overline{Q}_T$

$$f_1(s,t,0,0) \geq 0$$

und

$$f_2(s,t,\xi,\eta) = 0 \quad \forall \xi \in ID, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_1 \in \mathbb{R}^N$$

gilt. Während für $\xi \in ID \setminus \{0\}$ wegen $N(\xi) = \{0\} \times \mathbb{R}$ auch die in den oben erwähnten Arbeiten benutzte Tangentialbedingung erfüllt ist, ist sie wegen $N(0) = -\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ für $\xi = 0$ verletzt, falls es einen Punkt

$(s,t,\eta_2) \in \overline{Q}_T \times \mathbb{R}^N$ gibt, so daß für $\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$

$$f_1(s,t,0,\eta) < 0$$

ist. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß wir unsere Ergebnisse auf abstraktere Sätze über Evolutionsgleichungen (vgl. [59], [9], [B7]),

[39]) zurückführen, während die in den oben erwähnten Arbeiten benutzen Methoden sehr viel spezieller sind.

Im folgenden werden wir das aus $(ARWP)_{x,\lambda}$ durch Streichung der Anfangsbedingung $u(0) = x$ entstehende parabolische Randwertproblem mit $(RWP)_\lambda$ bezeichnen, wobei wir λ im Falle $\lambda = 1$ wieder weglassen.

Unter einer Lösung von $(RWP)_\lambda$ wollen wir eine Abbildung $u \in C^{(2)}(\overline{Q_T}, \mathbb{R}^M) \cap C^{(1)}(\overline{Q_T}, \mathbb{R}^M)$ verstehen, die $(RWP)_\lambda$ punktweise erfüllt. Eine solche Lösung nennen wir *T-periodisch*, falls $u(s,T) = u(s,0)$ für alle $s \in \overline{\Omega}$ gilt.

In [9 , Theorem 2] wies H. Amann für beschränktes ID die Existenz mindestens einer T-periodischen Lösung von (RWP) nach. Wir wollen nun entsprechende Existenzsätze für spezielle *unbeschränkte* Mengen ID beweisen und uns insbesondere auf Abbildungen f konzentrieren, die bezüglich (ξ, η) asymptotisch linear sind. Dazu formulieren wir die folgende Voraussetzung

$$(A6) \left\{ \begin{array}{l} (A6.1) \text{ Für } 0 \leq j \leq N \text{ und } 1 \leq i, k \leq M \text{ seien Funktionen} \\ c_j^{ik} \in C^{(u_0)}(\overline{Q_T}) \text{ gegeben, und es sei} \\ c_j := \begin{pmatrix} c_j^{11} & \dots & c_j^{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ c_j^{M1} & \dots & c_j^{MM} \end{pmatrix} \quad \forall 0 \leq j \leq N \\ \\ \text{Ferner gelte} \\ (A6.2) \lim_{\substack{(\xi, \eta) \rightarrow \infty \\ (\xi, \eta) \in ID \times (\mathbb{R}^M)^N}} \sup_{(s,t) \in \overline{Q_T}} \frac{|f(s,t,\xi,\eta) - c_0(s,t)\xi - \sum_{j=1}^N c_j(s,t)\eta^j|}{|(\xi,\eta)|} = 0 \end{array} \right. \quad 1)$$

Man beachte, daß die Wachstumsbedingung (A5) unter der Voraussetzung (A6) stets erfüllt ist.

¹⁾ Hier sei η^j Platzhalter für $D_j u$

Theorem 2:

Die Voraussetzungen (A1), (A2), (A3) und (A6) seien mit $ID = \mathbb{R}^M$ erfüllt, und das lineare Randwertproblem

$$(L; (C_j)_{0 \leq j \leq N}) \begin{cases} u_t + A(.,., D)u = (A_0 + C_0)u + \sum_{j=1}^N C_j D_j u & \text{in } Q_T \\ B(., D)u = 0 & \text{auf } S_T \end{cases}$$

besitze keine nichttriviale T-periodische Lösung. Dann besitzt (RWP) mindestens eine T-periodische Lösung.

Für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen ist ein analoger Satz bereits bekannt (vgl. [34, Theorem 3.4]). Bevor wir näher auf die Voraussetzung über $(L; (C_j)_{0 \leq j \leq N})$ eingehen, wollen wir noch einige weitere Resultate in dieser Richtung angeben. Dazu bemerken wir zunächst, daß (A4) sich im Falle $ID = \mathbb{R}_+^M$ in der Form

$$(A4)_+ \begin{cases} \text{Für jeden Index } i \in \{1, \dots, M\} \text{ gelte } f_i(s, t, \xi, \eta) \geq 0 \\ \text{für alle } (s, t, \xi, \eta) \in \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}_+^M \times (\mathbb{R}^M)^N \text{ mit} \\ (\xi_i, \eta_i) = (0, 0) \end{cases}^1$$

schreiben läßt. Es sei an dieser Stelle ausdrücklich darauf hingewiesen, daß im Falle $ID = \mathbb{R}_+^M$ die in (A6) auftretenden Matrizen C_j unter der Voraussetzung $(A4)_+$ eine ganz spezielle Form haben, denn für $1 \leq i \neq k \leq M$ und $1 \leq j \leq N$ folgt

$$c_o^{ik} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} f_i(., \tau e_k^M, 0) \geq 0$$

und

$$\pm c_j^{ik} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} f_i(., \tau e_k^{(j)}, \dots, 0) \geq 0, \quad \text{d.h. es gilt } C_0 \geq \text{diag } C_0 \text{ und } C_j = \text{diag } C_j \text{ für } 1 \leq j \leq N.$$

Das lineare Problem $(L; (C_j)_{0 \leq j \leq N})$ ist also nur schwach gekoppelt.

Dies schließt natürlich nicht aus, daß (RWP) selbst stark gekoppelt ist.

¹⁾ Hier sei η_i Platzhalter für ∇u_i

Theorem 3:

Mit $ID = \mathbb{R}_+^M$ seien die Voraussetzungen (A1), (A2), (A3), (A4)₊ und (A6) erfüllt, und $(L; (C_j)_{0 \leq j \leq N})$ besitze für $\lambda \geq 1$ keine positive Lösung u mit $u(T) = \lambda u(0)$. Dann besitzt (RWP) mindestens eine nichtnegative T-periodische Lösung.

Genügt f keiner asymptotischen Bedingung der Form (A6.2), so kann man trotzdem unter geeigneten Zusatzbedingungen sogar für Abbildungen mit fastquadratischem Wachstum in (ξ, η) ähnliche Existenzaussagen beweisen.

Unter der Voraussetzung (A2) sagen wir, f sei in ID *außerhalb der Diagonalen wachsend*, falls für jeden Index $i \in \{1, \dots, M\}$ die Ungleichung $f_i(., \dots, \bar{\xi}, \bar{\eta}) \leq f_i(., \dots, \hat{\xi}, \hat{\eta})$ in allen Punkten $(\bar{\xi}, \bar{\eta}), (\hat{\xi}, \hat{\eta}) \in ID \times (\mathbb{R}^M)^N$ mit $\bar{\xi} \leq \hat{\xi}$ und $(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i) = (\hat{\xi}_i, \hat{\eta}_i)$ erfüllt ist. Man beachte, daß f in diesem Fall höchstens *schwach gekoppelt* sein kann.

Theorem 4:

Mit $ID = \mathbb{R}^M$ gelte (A1), (A2), (A3) und (A6.1). Es sei $A_0 \geq \text{diag } A_0$, $C_0 \geq \text{diag } C_0$, $C_j = \text{diag } C_j$ für alle $1 \leq j \leq N$, und $(L; (C_j)_{0 \leq j \leq N})$ besitze für $\lambda \geq 1$ keine positive Lösung u mit $u(T) = \lambda u(0)$. Ferner sei f in $\mathbb{R}^M$ außerhalb der Diagonalen wachsend und genüge für ein $\sigma_0 \in [1, 2)$ der Wachstumsbedingung

$$\sup_{(s, t, \xi, \eta) \in \overline{Q}_T \times (\mathbb{R}^M)^{N+1}} \frac{|f(s, t, \xi, \eta)|}{1 + |(\xi, \eta)|^{\sigma_0}} < \infty,$$

während mit einer Abbildung $g \in C_+(\overline{Q}_T, \mathbb{R}^M)$ die Ungleichung

$$f(., \dots, \xi, \eta) \leq C_0 \xi + \sum_{j=1}^N C_j \eta^j + g \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}_+^M \times (\mathbb{R}^M)^N$$

erfüllt sei. Dann folgt:

(i) Gilt außerdem die Ungleichung

$$f(., \dots, \xi, \eta) \leq C_0 \xi + \sum_{j=1}^N C_j \eta^j - g \quad \forall (\xi, \eta) \in (-\mathbb{R}_+^M) \times (\mathbb{R}^M)^N,$$

so besitzt (RWP) mindestens eine T-periodische Lösung.

- (ii) Falls $f(.,.,0,0) \geq 0$ gilt, so besitzt (RWP) mindestens eine nichtnegative T-periodische Lösung.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Verallgemeinerung zweier Ergebnisse von H. Amann (vgl. [10, Theorem 1.3, Corollary 1.4]) auf Systeme. Mit [10, Corollary 1.4] verbesserte H. Amann bereits ein älteres Resultat von Ju. S. Kolesov, der in [31, Theorem 8] keine Gradientenabhängigkeit zuließ und nur das Dirichlet-Problem behandelte. Einen analogen Satz für den Fall einer elliptischen Gleichung findet man in [33, Theorem 7.11].

Wir wollen nun hinreichende Bedingungen an A_0 und die C_j , $0 \leq j \leq N$, angeben, unter denen die Zahl

$$\rho((C_j)_{0 \leq j \leq N}) := \sup\{\lambda \geq 0 \mid (L; (C_j)_{0 \leq j \leq N}) \text{ besitzt eine nicht-triviale Lösung } u \text{ mit } u(T) = \lambda u(0)\}$$

kleiner als 1 ist und somit insbesondere die in den letzten drei Sätzen an $(L; (C_j)_{0 \leq j \leq N})$ formulierten Voraussetzungen erfüllt sind. Dazu führen wir für Funktionen $g_{ij} \in C(\bar{\Omega})$, $1 \leq i, j \leq M$, die folgende Bezeichnung ein:

Die Matrix $G := (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq M}$ heißt *stark quasipositiv*, falls $G \geq \text{diag } G$ gilt und Indizes $i_v \in \{1, \dots, M\}$ existieren, für die

$$i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n \neq i_{n+1} = i_1, \{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, M\}$$

und

$$g_{i_v i_{v+1}} > 0 \quad \forall \quad 1 \leq v \leq n$$

gilt (vgl. [, Theorem 4.5]).

Ist nun unter den Voraussetzungen (A1) und (A6.1) die folgende Bedingung

$$(Stab; (C_j)_{0 \leq j \leq N}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Für jede Zahl } t \in (0, T) \text{ sei } A_0(t) + C_0(t) \text{ stark} \\ \text{quasipositiv, es gelte } C_j = \text{diag } C_j \text{ für alle} \\ 1 \leq j \leq N, \text{ und es existiere eine Abbildung} \\ u \in C^{(2)}(Q_T, \mathbb{R}^M) \cap C(\bar{Q}_T, \mathbb{R}^M), \text{ die den Ungleichungen} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t + A(.,.,D)u \geq (A_0 + C_0)u + \sum_{j=1}^N C_j D_j u & \text{in } Q_T \\ B(.,D)u \geq 0 & \text{auf } S_T \\ 0 \leq u(0) \leq u(T) & \text{auf } \bar{\Omega} \end{array} \right.$$

genügt, aber keine T-per. Lösung von $(L; (C_j)_{0 \leq j \leq N})$ ist.

erfüllt, so ist $\rho((C_j)_{0 \leq j \leq N}) < 1$. An dieser Stelle sei erwähnt, daß die obige Ungleichung in folgendem Sinne die Stabilität der trivialen Lösung von $(L; (C_j)_{0 \leq j \leq N})$ impliziert:

Falls A , A_0 und die C_j , $0 \leq j \leq N$, bezüglich der Zeitvariablen T-periodisch auf $\mathbb{R}_+$ fortgesetzt werden können, so gibt es eine Zahl $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ derart, daß zu jedem Exponenten

$$\sigma > \frac{1}{T} \ln \rho((C_j)_{0 \leq j \leq N})$$

eine Konstante $c(\sigma) > 0$ existiert, für die jede Lösung u von

$(L; (C_j)_{0 \leq j \leq N})$ der Abschätzung

$$\|u(t)\|_{C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M)} \leq c t^{-\alpha} e^{\sigma t} \|u(0)\|_{C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M)} \quad \forall t > 0$$

genügt.

Falls $(L; (C_j)_{0 \leq j \leq N})$ in mehrere untereinander entkoppelte Systeme zerfällt (d.h. A_0 und die C_j , $0 \leq j \leq N$, haben Kästchen- oder sogar Diagonalgestalt), so kann man die Ungleichung $\rho((C_j)_{0 \leq j \leq N}) < 1$ nachweisen, falls für jedes dieser Teilsysteme eine Bedingung der Form $(\text{Stab}; (C_j)_{0 \leq j \leq N})$ erfüllt ist. Wir wollen jedoch nicht näher darauf eingehen.

Testet man die Ungleichungen in $(\text{Stab}; (C_j)_{0 \leq j \leq N})$ an konstanten Abbildungen $u = \xi \in \mathbb{R}_+^M$, so ergeben sich sehr leicht nachprüfbare hinreichende Bedingungen (vgl. Bemerkungen nach Lemma 6.7). Wählt man z.B.

$u = \mathbf{1}^M$, so ergibt sich die Forderung, daß in dem Ungleichungssystem

$$\sum_{i=1}^M (a_{0i}^{ki} + c_{0i}^{ki}) \leq 0 \leq b_{0i}^k, \quad 1 \leq k \leq M$$

nicht nur Gleichheitszeichen auftreten. Schreibt man die Randbedingungen in der Form

$$\delta_k \frac{\partial u_k}{\partial \beta^k} = -b_o^k u_k \quad \forall \quad 1 \leq k \leq M,$$

so besagt das obige Kriterium grob gesprochen, daß die Diagonalkoeffizienten, d.h. die Koeffizienten von u_k in der k-ten Gleichung, nicht-positiv und in einem offensichtlichen Sinne dominierend sein müssen.

Falls A und die Koeffizientenmatrizen A_o und C_j , $0 \leq j \leq N$, von t unabhängig sind und der kleinste Eigenwert λ_o von

$$A(.,D)x = (A_o + C_o)x + \sum_{j=1}^N C_j D_j x + \lambda x \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

$$B(.,D)x = 0 \quad \text{auf } \partial \Omega$$

positiv ist (zur Existenz von λ_o vgl. Bem. im Anschluß an Lemma 6.7), so ist $(\text{Stab}; (C_j)_{0 \leq j \leq N})$ ebenfalls erfüllt.

Da (RWP) genau dann trivial lösbar ist, wenn $f(.,.,0,0) = 0$ gilt, liefern die letzten drei Sätze im Falle $f(.,.,0,0) \neq 0$ nichttriviale Lösungen. Für den anderen Fall wollen wir nun unter der Voraussetzung

$$(A7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Es sei } f(.,.,0,0) = 0, f \text{ besitze für ein } \mu \in (0,1) \text{ in} \\ (\xi, \eta) = (0,0) \text{ partielle Ableitungen} \\ G_j := D_{\eta^j} f(.,.,0,0) \in C^\mu(\overline{Q}_T, \mathcal{L}(\mathbb{R}^M)) , \\ \text{wobei } \eta^0 := \xi \text{ gesetzt werde, und es gelte} \\ \lim_{\substack{(\xi, \eta) \rightarrow (0,0) \\ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}_+^M \times (\mathbb{R}^M)^N}} \sup_{(s,t) \in \overline{Q}_T} \frac{|f(s,t,\xi,\eta) - G_o(s,t)\xi - \sum_{j=1}^N G_j(s,t)\eta^j|}{|(\xi, \eta)|} = 0 \end{array} \right.$$

mindestens eine positive T-periodische Lösung von (RWP) nachweisen.

Wie bei den asymptotischen Ableitungen C_j in (A6) zeigt man, daß die G_j unter der Voraussetzung $(A4)_+$ zwangsläufig von der Form

$$G_o \geq \text{diag } G_o, \quad G_j = \text{diag } G_j \quad \forall \quad 1 \leq j \leq N$$

sind.

Theorem 5:

Neben den Voraussetzungen von Theorem 3 gelte (A7), und $(L; (G_j)_{0 \leq j \leq N})$ besitze für irgendein $\lambda > 1$ eine positive Lösung u mit $u(T) = \lambda u(0)$,

während für $\lambda = 1$ keine derartige positive Lösung existiere.

Dann besitzt (RWP) eine positive T-periodische Lösung u mit $u(0) > 0$.

Die in diesem Satz formulierte Voraussetzung an $(L; (G_j)_{0 \leq j \leq N})$ ist z.B. erfüllt, falls $A_0(t) + G_0(t)$ für jedes $t \in (0, T)$ stark quasipositiv ist und für irgendein $i \in \{1, \dots, M\}$ die Ungleichungen

$$b_0^i \leq 0 \leq a_0^{ii} + \frac{\partial f_i}{\partial \xi_i}(\dots, 0, 0)$$

gelten, wobei wieder mindestens ein striktes Zeichen aufzutrete. Für weitere (sehr viel allgemeinere) hinreichende Bedingungen sei auf die Bemerkungen im Anschluß an Lemma 6.7 verwiesen.

Theorem 5 stellt die Übertragung des in [7, Theorem 15.1] für elliptische Gleichungen formulierten Resultats auf parabolische Systeme dar und ist ferner mit Sätzen von M. A. Krasnosel'skii und Ju. S. Kolesov verwandt (vgl. [34, Theorem 4.17], [31, Theorem 9]), in denen lineare Majoranten und Minoranten benutzt werden. Schließlich sei noch bemerkt, daß die Aussage dieses Satzes richtig bleibt, wenn man die Voraussetzungen über $(L; (C_j)_{0 \leq j \leq N})$ und $(L; (G_j)_{0 \leq j \leq N})$ vertauscht, d.h. wenn es zu $(L; (C_j)_{0 \leq j \leq N})$ für irgendein $\lambda > 1$ eine positive Lösung u mit $u(T) = \lambda u(0)$ gibt, während $(L; (C_j)_{0 \leq j \leq N})$ für $\lambda = 1$ und $(L; (G_j)_{0 \leq j \leq N})$ für $\lambda \geq 1$ keine derartigen positiven Lösungen besitzen.

Für die folgenden Sätze wollen wir die Regularitätsforderungen an f ein wenig verschärfen, indem wir

$$(A8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Es sei } ID = \mathbb{R}^M \text{ oder } \mathbb{R}_+^M, \text{ und } f \text{ besitze für ein} \\ \mu \in (0, 1) \text{ partielle Ableitungen } (\eta^0 := \xi) \\ D_{\pi_j} f \in C^\mu(\overline{Q}_T \times ID \times (\mathbb{R}^M)^N, \mathcal{L}(\mathbb{R}^M)) \quad \forall 0 \leq j \leq N \end{array} \right.$$

voraussetzen. Man beachte, daß die Lipschitzbedingung (A3) aus (A8) folgt.

Den folgenden Stabilitätssatz formulieren wir der Einfachheit halber für

$$ID = \mathbb{R}^M.$$

Theorem 6:

Mit $D = \mathbb{R}^M$ seien (A1), (A2) und (A8) erfüllt, und A , A_0 und f seien bezüglich der Zeitvariablen T -periodisch auf $\mathbb{R}_+$ fortsetzbar.

Wir betrachten eine T -periodische Lösung u_0 von (RWP) und setzen

$$G_j := D_{\eta_j} f(.,., u_0(.,.), D_{\xi} u_0(.,.)) \quad \forall \quad 0 \leq j \leq N.$$

Falls $\rho((G_j)_{0 \leq j \leq N}) < 1$ gilt, so gibt es eine Zahl $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ derart,

daß zu jedem Exponenten $\sigma > \omega_0 := \frac{1}{T} \ln \rho((G_j)_{0 \leq j \leq N})$ Konstanten

$c(\sigma) > 0$ und $\delta(\sigma) > 0$ existieren, so daß (ARWP) $_x$ für alle

$x \in C_B^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M)$ mit $\|x - u_0(0)\|_{C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M)} \leq \delta$ eine eindeutig bestimmte

auf ganz $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+$ fortsetzbare Lösung $u(.,.; x)$ besitzt und

$$\|u(.,.; x) - u_0(.,.)\|_{C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M)} \leq c t^{-\alpha} e^{\sigma t} \|x - u_0(0)\|_{C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M)}$$

für alle $t > 0$ gilt.

Falls $A_0(t) + G_0(t)$ für $t \in (0, T)$ stark quasipositiv ist und das Ungleichungssystem

$$\sum_{i=1}^M [a_0^{ki} + \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} (.,., u_0(.,.), D_{\xi} u_0(.,.))] \leq 0 \leq b_0^k, \quad 1 \leq k \leq M,$$

nicht nur Gleichheitszeichen enthält, so ist $(\text{Stab}; (G_j)_{0 \leq j \leq N})$ und so-

mit insbesondere die Ungleichung $\rho((G_j)_{0 \leq j \leq N}) < 1$ erfüllt. Man be-

achte, daß in Theorem 6 keinerlei Wachstumsbedingungen oder a priori-

Abschätzungen vorausgesetzt wurden. In der Nähe des Anfangswertes der

global existierenden Lösung u_0 erübrigen sich derartige Voraussetzungen.

Trotz der Ähnlichkeit mit einem Stabilitätsresultat von H. Amann in [8,

Theorem 4.3] ist unser Satz nicht nur wegen der allgemeineren Voraus-

setzungen über A , A_0 und f von seinem Ergebnis verschieden und eher

mit einem Stabilitätssatz von J. Rauch verwandt, der in [49, Theorem 13]

einen ähnlichen Satz für stationäre Lösungen u_0 einer autonomen nicht-

linearen Wärmeleitungsgleichung mit Neumann-Randbedingungen bewies. Wäh-

rend J. Rauch eine zu unseren Voraussetzungen analoge Bedingung an die

in u_0 linearisierte Gleichung stellt, betrachtet H. Amann *gleichmäßig* Lipschitzstetige Nichtlinearitäten mit hinreichend kleinen Lipschitzkonstanten. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß J. Rauch viel speziellere Gleichungen als wir behandelt (und keine Systeme) und außerdem die Schranke ω_0 für den Stabilitätsexponenten nicht angibt.

Wir wollen uns nun dem nichtlinearen *Eigenwertproblem* $(RWP)_\lambda$ mit $ID = \mathbb{R}_+^M$ zuwenden und globale Kontinua nichtnegativer T-periodischer Lösungen im (u, λ) -Raum untersuchen.

Falls in dem linearen System $(L; (C_j)_{0 \leq j \leq N})$ sämtliche Matrizen C_j identisch verschwinden, so bezeichnen wir es mit $(L; 0)$ und setzen $\rho(0) := \rho((C_j)_{0 \leq j \leq N})$ und $(\text{Stab}; 0) := (\text{Stab}; (C_j)_{0 \leq j \leq N})$. Gibt es für $\lambda \in \mathbb{R}$ eine T-periodische Lösung $\underline{u}(\lambda)$ von $(RWP)_\lambda$, so daß $\underline{u}(\lambda) \leq u_\lambda$ für jede T-periodische Lösung u_λ von $(RWP)_\lambda$ gilt, so nennen wir $\underline{u}(\lambda)$ die minimale T-periodische Lösung von $(RWP)_\lambda$. Sie ist natürlich eindeutig bestimmt. Schließlich setzen wir

$$\lambda^* := \sup \{ \lambda \in \mathbb{R}_+ / (RWP)_\lambda \text{ besitzt eine (nichtneg.) T-periodische Lösung} \},$$

$$E := C^{(2)}(Q_T, \mathbb{R}^M) \cap C^{(1)}(\overline{Q}_T, \mathbb{R}^M)$$

und können folgenden Satz formulieren:

Theorem 7:

Mit $ID = \mathbb{R}_+^M$ setzen wir (A1), (A2), (A5) und (A8) voraus, wobei f nichtnegativ und außerhalb der Diagonalen wachsend sei. Falls ferner $\rho(0) < 1$ gilt, so ist $\lambda^* \in (0, \infty]$, die Zusammenhangskomponente von $(0, 0)$ in

$$\{(u(0), \lambda) \in C_B^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M) \times \mathbb{R}_+ / u \text{ ist (nichtneg.) T-periodische Lösung von } (RWP)_\lambda \}$$

ist in $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M) \times \mathbb{R}$ unbeschränkt, zu jedem $\lambda \in [0, \lambda^*)$ besitzt $(RWP)_\lambda$ eine minimale nichtnegative T-periodische Lösung $\underline{u}(\lambda)$, und die Abbildung

$\underline{u} : [0, \lambda^*) \rightarrow E$ ist linksseitig stetig und wachsend .

Falls λ^* endlich ist, so besitzt $(RWP)_{\lambda^*}$ genau dann eine T-periodische Lösung, wenn

$$\sup_{0 \leq \lambda < \lambda^*} \|\underline{u}(\lambda)(\cdot, 0)\|_{C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{M_1})} < \infty$$

gilt. In diesem Fall existiert $u_{\lambda^*} := \lim_{\lambda \uparrow \lambda^*} \underline{u}(\lambda)$ in E ,

und u_{λ^*} ist die minimale T-periodische Lösung von $(RWP)_{\lambda^*}$.

Dieser Satz kann als "parabolisches Pendant" zu einem von H. Amann in [6 , Theorem 7.2] erzielten Resultat für elliptische Differentialgleichungen betrachtet werden. Man beachte jedoch, daß dort weder Systeme noch gradientenabhängige Nichtlinearitäten behandelt werden. H. Amann konnte jedoch im asymptotisch linearen Fall eine hinreichende Bedingung für die Existenz von mindestens zwei Lösungen für Parameter λ in einem gewissen Intervall angeben (vgl. [6 , Theorem 7.6]). Daß dies auch hier möglich ist, wenn wir die Positivitätsvoraussetzungen an A_0 verschärfen, soll im folgenden Satz gezeigt werden. Die gleiche Überlegung, die uns bei der Vorbereitung von Theorem 3 zeigte, daß die asymptotischen Ableitungen C_j von f nach η^j gemäß (A6) unter der Voraussetzung $(A4)_+$ von spezieller Gestalt sind, liefert uns für *nichtnegatives* f die Relationen

$$C_0 \geq 0 \quad , \quad C_j = 0 \quad \forall \quad 1 \leq j \leq N \quad ,$$

die jedoch nicht ausschließen, daß f selbst gradientenabhängig ist.

Theorem 8:

Mit $ID = \mathbb{R}_+^M$ seien (A1), (A2), (A6) und (A8) vorausgesetzt, wobei (Stab;0) erfüllt sei und f außerhalb der Diagonalen wachsend sei.

Ferner existiere eine Funktion $\sigma \in C_+([0, T]) \setminus \{0\}$ mit

$$f(s, t, \xi, \eta) \geq \sigma(t)\xi \quad \forall \quad (s, t, \xi, \eta) \in \bar{Q}_T \times \mathbb{R}_+^M \times (\mathbb{R}^M)^N$$

und $f(\cdot, \cdot, 0, 0)$ sei nicht identisch Null.

Dann gilt $0 < \lambda^* < \infty$, und die Behauptungen von Theorem 7 sind erfüllt, wobei

$$\underline{u}(\lambda_1)(s, t) < \underline{u}(\lambda_2)(s, t) \quad \forall (s, t) \in \Omega \times [0, T], \quad \forall 0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda^*$$

gilt. Außerdem gibt es genau eine reelle Zahl $\lambda = \lambda_\infty$, für die das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_t + A(\cdot, \cdot, D)u &= (A_0 + \lambda C_0)u \quad \text{in } Q_T \\ B(\cdot, D)u &= 0 \quad \text{auf } S_T \end{aligned}$$

eine positive T-periodische Lösung besitzt, und es ist $\lambda_\infty \in (0, \lambda^*)$. Die Zusammenhangskomponente von $(0, 0)$ in

$$\{(u, \lambda) \in E \times \mathbb{R}_+ / u \text{ ist nichtnegative T-periodische Lösung von (RWP)}_\lambda\}$$

enthält eine Folge (u_j, λ_j) mit $\lambda_j \rightarrow \lambda_\infty$ und $\|u_j(0)\|_{C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M)} \rightarrow \infty$, und für jede offene Umgebung U von λ_∞ ist die Menge

$$\{u / u \text{ ist (nichtnegative) T-periodische Lösung von (RWP)}_\lambda \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus U\}$$

relativ kompakt in E.

Falls $\lambda_\infty < \lambda^*$ ist, so besitzt $(\text{RWP})_\lambda$ zu jedem $\lambda \in (\lambda_\infty, \lambda^*)$ außer $\underline{u}(\lambda)$ mindestens eine weitere T-periodische Lösung u, und es gilt

$$u(s, t) > \underline{u}(\lambda)(s, t) > 0 \quad \forall (s, t) \in \Omega \times [0, T].$$

Im folgenden Satz wollen wir schließlich eine einfache hinreichende Bedingung dafür angeben, daß in Theorem 8 die Voraussetzung $\lambda_\infty < \lambda^*$, die das Vielfachheitsresultat lieferte, erfüllt ist.

Theorem 9:

Unter den Voraussetzungen von Theorem 8 sei f von n unabhängig (d.h. $(\text{RWP})_\lambda$ mild nichtlinear). Falls es eine Abbildung

$\gamma \in C_+(\bar{Q}_T, \mathbb{R}^M) \setminus \{0\}$ und eine Zahl $\rho > 0$ mit

$$f(\cdot, \cdot, \xi) \leq C_0(\cdot, \cdot) \xi - \gamma \quad \forall \xi \in \mathbb{R}_+^M \setminus \rho B^M$$

gibt, so ist $0 < \lambda_\infty < \lambda^*$, und es gelten die Behauptungen von Theorem 8.

Auch zu diesem Satz formulierte H. Amann bereits in [3 , Theorem 3.2] ein Analogon für elliptische Differentialgleichungen und $M = 1$, wobei er allerdings eine Ungleichung benutzte, die - auf eine kurze Form gebracht - von der Gestalt

$$f'(\xi)\xi - f(\xi) \geq \gamma > 0 \quad \forall \xi \geq \rho$$

war. Wir wollen abschließend zeigen, daß diese Bedingung, die striktes Wachstum von $f(\xi)/\xi$ impliziert, ein Spezialfall der in Theorem 9 vorausgesetzten Ungleichung ist, in der wir $f'(\xi)$ durch die asymptotische Ableitung $f'(\infty)$ ersetzt und keine derartige monotone Konvergenz gegen $f'(\infty)$ verlangt haben. Zu diesem Zweck definieren wir für festes $\xi \geq \rho$ die Funktion

$$g(\tau) := \frac{f(\tau\xi)}{\tau} \quad \forall \tau \in [1, \infty)$$

Wegen

$$\tau^2 g'(\tau) = f'(\tau\xi)\tau\xi - f(\tau\xi) \geq \gamma$$

erhalten wir

$$g(\tau) - g(1) \geq \gamma \int_1^\tau \sigma^{-2} d\sigma = \gamma(1 - \frac{1}{\tau}) ,$$

woraus für $\tau \rightarrow \infty$ die von uns benutzte Ungleichung

$$f'(\infty)\xi - f(\xi) \geq \gamma$$

folgt.

§ 0. Hilfsmittel aus der Theorie der geordneten Banachräume

Wir betrachten einen reellen BR E . Gilt für eine nichtleere Teilmenge K von E

$$\mathbb{R}_+ K \subset K, \quad K + K \subset K,$$

so nennen wir K einen *Keil* in E . Sind A bzw. F beliebige nichtleere Teilmengen des Raumes E bzw. seines stetigen Dualraumes E' und bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die duale Paarung zwischen E' und E , so sind z.B. die Mengen

$${}^*F := \{x \in E \mid \langle x', x \rangle \geq 0 \quad \forall x' \in F\}$$

und

$$A^* := \{x' \in E' \mid \langle x', x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in A\}$$

abgeschlossene Keile in E bzw. E' . Mit $A^0 := A^* \cap (-A^*)$ bezeichnen wir den Annihilator von A in E' .

0.1 Lemma:

Ist K ein Keil in E , so gilt:

- (i) Jedes auf K nach unten beschränkte stetige lineare Funktional ist Element von K^* .
- (ii) Für jedes $x \in K$ gilt

$$(K-x)^* = K^* \cap \{x\}^0.$$

Beweis:

- (i) Ist $x' \in E'$ nach unten beschränkt, so gibt es eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$, so daß für alle $x \in K$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\langle x', kx \rangle \geq \alpha$$

gilt. Für $k \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$\langle x', x \rangle \geq 0.$$

(ii) Für $x \in K$ und $x' \in (K-x)^*$ folgt $x' \in K^*$ nach (i).

Da wegen $0 \in K$ auch

$$\langle x', -x \rangle \geq 0$$

gilt, ist $x' \in \{x\}^0$, so daß $(K-x)^* \subset K^* \cap \{x\}^0$ gezeigt ist.

Die umgekehrte Inklusion ist trivialerweise richtig.

□

Ein Keil P heißt *Kegel*, falls er abgeschlossen ist und im Sinne der Gleichung

$$P \cap (-P) = \{0\}$$

nicht zu groß ist. Der Keil A^* - wie oben definiert - ist somit genau dann ein Kegel, wenn der Annihilator A^0 nur aus dem Nullfunktional besteht. Dies gilt nach dem Satz von Hahn-Banach genau dann, wenn A *total* in E ist (d.h.: $\overline{\text{span } A} = E$). Ist P ein Kegel in E , so wird für $x, y \in E$ durch

$$x \leq y : \Leftrightarrow y - x \in P$$

eine (reflexive, transitive und antisymmetrische) Ordnungsrelation definiert, die mit der linearen und topologischen Struktur von E verträglich ist, und wir nennen das Paar (E, P) einen *geordneten Banachraum* (Abkürzung: OBR). Jedes Element aus P nennen wir *nichtnegativ*, Elemente aus $\dot{P} := P \setminus \{0\}$ heißen *positiv*. Außerdem benutzen wir für $x, y \in E$ die folgenden abkürzenden Schreibweisen:

$$x \not\leq y : \Leftrightarrow y - x \notin P$$

$$x < y : \Leftrightarrow y - x \in \dot{P}$$

und falls P innere Punkte besitzt

$$x \ll y : \Leftrightarrow y - x \in P^{\circ}.$$

Die Menge

$$[x, y] := (x + P) \cap (y - P)$$

bezeichnen wir als ein *Ordnungsintervall* in E . Jedes Ordnungsintervall ist eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von E . Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jedes Ordnungsintervall in E beschränkt ist, ist die Existenz einer Konstanten $\gamma \geq 1$, so daß für alle $x, y \in E$ mit $0 \leq x \leq y$ die Ungleichung

$$\|x\| \leq \gamma \|y\|$$

gilt (vgl. [, Theorem 1.5]). In diesem Fall heißt P *normal*.

Mit den Abkürzungen

$$(\overline{IB})^+ := (\overline{IB}) \cap P, \quad S^+ := S \cap P$$

sagen wir, P *liefern eine offene Zerlegung* von E , falls $IB^+ - IB^-$ eine Nullumgebung ist. In diesem Fall ist P sicherlich *erzeugend* in E (d.h.: $\text{span } P = E$). Mit Hilfe des Baire'schen Kategoriensatzes kann man zeigen, daß auch die Umkehrung gilt (vgl. [33 , 3.1.3]).

Das Kreuzprodukt $E = E_1 \times \dots \times E_m$ geordneter Banachräume (E_i, P_i) wollen wir stets mit der durch den Kegel $P = P_1 \times \dots \times P_m$ induzierten Ordnung versehen. P ist genau dann *normal*, *total*, *erzeugend*, oder es gilt $P \neq \emptyset$, wenn jeder der Kegel P_i die entsprechende Eigenschaft besitzt.

Alle zu Beginn dieser Arbeit definierten Banachräume integrierbarer, stetiger oder differenzierbarer Abbildungen sind bzgl. der dort definierten natürlichen Ordnung geordnete Banachräume.

Falls Ω eine nichtleere offene Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ (bzw. des $\mathbb{R}^{N+1}$) und (E, P) ein OBR ist, so werden wir die folgenden Aussagen benötigen:

Für $1 \leq p \leq \infty$ sind die Kegel $L_{P+}(\Omega, E) = L_p(\Omega, P)$ *normal*, falls P *normal* ist. Für $p < \infty$ besitzen sie keine inneren Punkte.

Für $k \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in (0, 1) \cup \{1-\}$ sind die Kegel $C_+^{k+\sigma}(\overline{\Omega}, E) = C_+^{k+\sigma}(\overline{\Omega}, P)$ (bzw. $C_+^{(k+\sigma)}(\overline{\Omega}, E) = C^{(k+\sigma)}(\overline{\Omega}, P)$) genau dann *normal*, wenn $k = 0 = \sigma$ und P *normal* ist. Falls $P \neq \emptyset$ ist, so besitzen sie innere Punkte (sind also

insbesondere erzeugend¹⁾, und für $x \in C^{k+\sigma}(\bar{\Omega}, E)$ (bzw. $C^{(k+\mu)}(\bar{\Omega}, E)$) gilt

$$x \in C_+^{0, k+\sigma}(\bar{\Omega}, E) \quad (\text{bzw. } C_+^{0, (k+\mu)}(\bar{\Omega}, E)) \Leftrightarrow x(\bar{\Omega}) \subset \overset{\circ}{P}.$$

Sind (E, P) und (F, Q) zwei geordnete Banachräume und ist D eine nicht-leere Teilmenge von $D(f)$, so heißt eine Abbildung $f: D(f) \rightarrow F$ *positiv* (bzw. *strikt positiv*) in D , falls

$$f(D \cap P) \subset Q \quad (\text{bzw. } f(D \cap \overset{\circ}{P}) \subset Q)$$

gilt. Sie heißt *wachsend* (bzw. *strikt wachsend*) in D , falls für

$x, y \in D$ mit $x < y$ die Ungleichung $f(x) \leq f(y)$ (bzw. $f(x) < f(y)$)

folgt. Besitzt Q innere Punkte, so nennen wir f *stark positiv* (bzw. *stark wachsend*) in D , falls $f(D \cap \overset{\circ}{P}) \subset \overset{\circ}{Q}$ (bzw. $f(x) \ll f(y)$)

$\forall x, y \in D$ mit $x < y$) gilt. Neben diesen klassischen Positivitäts- und Wachstumsbegriffen (vgl. [33]) werden wir in dieser Arbeit ein neueres von P. Volkmann in [57] unter dem Begriff der Quasimonotonie eingeführtes Wachstumskonzept benutzen:

Im Falle $F = E$ heißt f *quasipositiv* in D , falls für alle $x \in D \cap P$ und $x' \in P^* \cap \{x\}^0$ die Ungleichung

$$\langle x', f(x) \rangle \geq 0$$

erfüllt ist; f heißt *quasiwachsend* in D , wenn

$$\langle x', f(y) - f(x) \rangle \geq 0$$

für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ und alle $x' \in P^* \cap \{y-x\}^0$ gilt.

Der abgeschlossene Keil $\mathcal{L}^+(E, F)$ der positiven Operatoren in $\mathcal{L}(E, F)$

ist genau dann ein Kegel, wenn P total ist. Im Falle $F = E$ schreiben

wir kurz $\mathcal{L}^+(E)$. Für $(F, Q) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ erhalten wir den dualen Keil

$\mathcal{L}^+(E, \mathbb{R}) = P^*$. Mit Hilfe des Trennungssatzes von Hahn-Banach beweist man das folgende Lemma (vgl. [29, (3.1.6)]).

¹⁾ $\overset{\circ}{P} \neq \emptyset \Rightarrow P$ erzeugend.

0.2 Lemma:

Sei (E, P) ein OBR. Dann gilt:

(i) $x \in P$ genau dann, wenn

$$\langle x', x \rangle \geq 0 \quad \forall x' \in P^* .$$

(ii) $x \in \dot{P}$ genau dann, wenn $x \in P$ und ein $x' \in P^*$ existiert mit

$$\langle x', x \rangle > 0 .$$

(iii) Besitzt P innere Punkte, so ist $x \in P^{\circ}$ genau dann, wenn für alle $x' \in P^* \setminus \{0\}$

$$\langle x', x \rangle > 0$$

gilt.

Der folgende wichtige Satz geht auf eine grundlegende Arbeit von M.G. Krein und M.A. Rutman zurück (vgl. [35, Theoreme 6.1, 6.2]). Dabei bezeichne

$$r(T) := \lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k\|_{\mathcal{L}(E)}^{1/k}$$

den Spektralradius von T und T' den dualen Operator zu T .

0.3 Theorem:

Ist (E, P) ein OBR mit totalem Kegel P und $T \in \mathcal{L}^+(E)$ ein kompakter Operator mit positivem Spektralradius $r(T)$, so gibt es einen Vektor $x_0 \in \dot{P}$ und ein Funktional $x'_0 \in P^* \setminus \{0\}$ mit

$$Tx_0 = r(T)x_0, \quad T'x'_0 = r(T)x'_0 .$$

An dieser Stelle sei kurz angemerkt, daß der Spektralradius eines Operators $T \in \mathcal{L}^+(E)$ positiv ist, wenn es einen Vektor $e \in E \setminus (-P)$ und eine positive Zahl α gibt mit

$$(0.1) \quad Te \geq \alpha e ,$$

denn durch Anwendung eines Funktionals $x' \in P^*$ mit $\langle x', e \rangle > 0$, dessen Existenz aus Lemma 0.2 (i) folgt, auf die aus (0.1) resultierende Ungleichung

$$T^k e \geq \alpha^k e \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

gelangen wir zu der Abschätzung

$$\alpha^k \leq \frac{\langle x^i, T^k e \rangle}{\langle x^i, e \rangle} \leq \frac{\|x^i\| \cdot \|e\|}{\langle x^i, e \rangle} \|T^k\|, \quad ,$$

aus der wir schließen können, daß

$$r(T) \geq \alpha$$

gilt. Betrachten wir einen stark positiven kompakten Operator T , so können wir noch einige weitere Aussagen über den Eigenwert $r(T)$ machen.

0.4 Theorem:

Es sei (E, P) ein OBR mit $\overset{0}{P} \neq \emptyset$, und $T \in \mathcal{L}^+(E)$ sei stark positiv und kompakt. Dann ist $r(T) > 0$, und die Aussage von Theorem 0.3 ist erfüllt, wobei $x_0 \in \overset{0}{P}$ und x_0^i strikt positiv ist. Außerdem ist $r(T)$ ein einfacher Eigenwert von T und T^* und der einzige Eigenwert von T mit einem positiven Eigenvektor. Die Ungleichung

$$(0.4.1) \quad Tx < \lambda x$$

besitzt genau dann eine Lösung $x \in P$ (bzw. $x \in E \setminus P$), wenn

$\lambda > r(T)$ (bzw. $\lambda < r(T)$) ist. Insbesondere besitzt sie für $\lambda = r(T)$ gar keine Lösung in E .

Beweis:

Bis auf die Behauptung über die Ungleichung (0.4.1) enthält [7 , Theorem 3.2] alle Aussagen dieses Satzes. Da der Vektor $x := \text{sign}(\lambda - r(T))x_0$ für $\lambda \neq r(T)$ die Ungleichung (0.4.1) löst, brauchen wir nur noch zu zeigen, daß umgekehrt aus der Lösbarkeit dieser Ungleichung in P bzw. $E \setminus P$ die behaupteten Ungleichungen über λ und $r(T)$ folgen. Ist $x \in E$ eine Lösung von (0.4.1), so erhalten wir durch Anwendung des Funktional x_0^i auf diese Ungleichung, daß

$$(0.4.2) \quad [\lambda - r(T)] \langle x_0^i, x \rangle > 0$$

gilt. Ist $x \in P$, so kann $\langle x_0^1, x \rangle$ in (0.4.2) nur positiv sein, und man erhält $\lambda > r(T)$. Für $x \in E \setminus P$ folgt aus der Bemerkung im Anschluß an Theorem 0.3 (mit $\alpha = \lambda$, $e = -x$), daß $\lambda \leq r(T)$ ist. Wegen (0.4.2) gilt das strikte Kleinerzeichen.

□

Wir wollen nun einige Aussagen über nichtlineare Abbildungen in einem OBR (E, P) zusammenstellen.

Eine nichtleere Teilmenge U von E nennen wir *rechtsseitige Umgebung* eines Punktes $x \in E$, falls es eine positive Zahl ε gibt mit $x + \varepsilon B^+ \subset U$. Betrachten wir eine auf einer solchen rechtsseitigen Umgebung U von $x \in E$ definierte Abbildung f mit Werten in einem BR F , so heißt f *rechtsseitig differenzierbar in x* , falls es einen (im Falle der Existenz stets eindeutig bestimmten) Operator $f'_+(x) \in \mathcal{L}(\overline{P-P}, F)$ gibt mit

$$\lim_{\substack{\|h\|_E \rightarrow 0 \\ h \in P}} \frac{\|f(x+h) - f(x) - f'_+(x)h\|_F}{\|h\|_E} = 0, \quad ,$$

und wir nennen $f'_+(x)$ die *rechtsseitige Ableitung von f in x* . Ist U rechtsseitige Umgebung für jedes $x \in U$, so heißt U *rechtsseitig offen*. Besitzt in diesem Fall f in jedem Punkte $x \in U$ eine rechtsseitige Ableitung $f'_+(x)$, so nennen wir die Abbildung $f'_+ : U \rightarrow (\overline{P-P}, F)$ die *rechtsseitige Ableitung von f* . Ist f stetig, so sagen wir, f sei *stetig rechtsseitig differenzierbar in U* .

0.5 Theorem:

Sei (E, P) ein OBR, U eine rechtsseitige Umgebung eines Punktes

$x_0 \in U$ und F ein beliebiger BR. Ferner sei $f : U \rightarrow F$ in x_0 rechtsseitig differenzierbar. Dann gilt:

- (i) Ist f vollstetig, so ist auch $f'_+(x_0)|_P$ vollstetig. Falls P erzeugend ist, gilt sogar $f'_+(x_0) \in \mathcal{L}(E, F)$.
- (ii) Ist U offen, P erzeugend, f stetig und stetig rechtsseitig differenzierbar in U , so ist f Fréchet-differenzierbar in U mit $f' = f'_+$.
- (iii) Falls F ebenfalls ein OBR und U konvex und rechtsseitig offen ist, so ist f genau dann (quasi-) wachsend, wenn $f'_+(x)$ für alle $x \in U$ als Operator von $\overline{P-P}$ nach F (quasi-) positiv ist. Falls $f'_+(x)$ für alle bis auf abzählbar viele $x \in U$ strikt (bzw. stark) positiv ist, so ist f strikt (bzw. stark) wachsend.
- (iv) Falls $F = E$ gilt, P innere Punkte besitzt, $f'_+(x_0) \in \mathcal{L}(E)$ stark positiv mit

$$r(f'_+(x_0)) > 1$$

und $x_0 \in U$ ein Fixpunkt von f ist, so gibt es einen Vektor $h \in P$ und eine Zahl $\delta > 0$, so daß für alle $t \in (0, \delta]$

$$f(x_0 + th) > x_0 + th$$

gilt. Falls f in x_0 Fréchet-differenzierbar ist, kann man δ so klein wählen, daß außerdem

$$f(x_0 - th) < x_0 - th$$

für alle $t \in (0, \delta]$ gilt.

Beweis:

Die Aussagen (i) und (ii) folgen aus [33, Chap. 3, Lemma 3.1, Theorem 3.2, Theorem 3.1] während (iii) wie in [6, Proposition 3.2] bewiesen wird. Der Beweis von (iv) verläuft völlig analog zu Beweis in [7, Lemma 7.5]. $\square$

Wir betrachten wieder einen OBR (E, P) und einen beliebigen BR F .

Eine Abbildung $f : P \rightarrow F$ heißt *asymptotisch linear*, falls es einen Operator $f'(\infty) \in \mathcal{L}(\overline{P-P}, F)$ gibt mit

$$\lim_{\substack{\|x\|_E \rightarrow \infty \\ x \in P}} \frac{\|f(x) - f'(\infty)x\|_F}{\|x\|_E} = 0.$$

Auch der Operator $f'(\infty)$ ist eindeutig bestimmt, und wir nennen ihn die *asymptotische Ableitung* von f .

0.6 Theorem:

Sei (E, P) ein OBR, F ein beliebiger BR und $f : P \rightarrow F$ eine vollstetige asymptotisch lineare Abbildung. Dann gilt:

- (i) $f'(\infty)|_P$ ist vollstetig. Falls P erzeugend ist, ist $f'(\infty)$ kompakt.
- (ii) Ist F ebenfalls ein OBR, und ist f positiv, so ist auch $f'(\infty)$ positiv.

Beweis:

[7 , Theorem 7.3] . $\square$

Der folgende Existenzsatz für positive Fixpunkte asymptotisch linearer Abbildungen geht auf M. A. Krasnosel'skii zurück (vgl. [33 , Chap. 4, Theorem 4.7, Theorem 4.16]). Wir verweisen hier auf die besonders eleganten Beweise in [7 , Theorem 13.5, Theorem 13.6] .

0.7 Theorem:

Sei (E, P) ein OBR und $f : P \rightarrow P$ eine asymptotisch lineare vollstetige Abbildung mit

$$f'(\infty)x \neq x \quad \forall x \in \mathbb{S}^+.$$

Ferner sei eine der folgenden beiden Voraussetzungen erfüllt:

$$(a) \quad f(0) > 0$$

$$\text{und} \quad f'(\infty)x \neq \lambda x \quad \forall (\lambda, x) \in (1, \infty) \times \mathbb{S}^+$$

oder

$$(b) \quad f(0) = 0, \quad f \text{ sei in } 0 \text{ rechtsseitig differenzierbar mit}$$

$$f'_+(0)x \neq x \quad \forall x \in \mathbb{S}^+,$$

und es existiere ein $(\lambda_0, x_0) \in (1, \infty) \times \mathbb{S}^+$, so daß eine der Bedingungen

$$(\alpha) \quad f'_+(0)x_0 = \lambda_0 x_0$$

$$f'(\infty)x \neq \lambda x \quad \forall (\lambda, x) \in (1, \infty) \times \mathbb{S}^+$$

oder

$$(\beta) \quad f'_+(0)x \neq \lambda x \quad \forall (\lambda, x) \in (1, \infty) \times \mathbb{S}^+$$

$$f'(\infty)x = \lambda_0 x_0$$

gilt.

Dann besitzt f mindestens einen positiven Fixpunkt.

Dieser Satz besagt im Eindimensionalen ganz einfach, daß eine positive stetige Funktion, deren Graph für kleine x -Werte oberhalb und für große x -Werte unterhalb der Winkelhalbierenden $y = x$ verläuft (oder umgekehrt), einen positiven Fixpunkt besitzt.

Wir wollen nun ein Lemma formulieren, mit dessen Hilfe wir eine auf unseren späteren Anwendungen zugeschnittene Variante eines von H. Amann in [7, Theorem 17.1] formulierten Resultats über die Fixpunktmenge positiver vollstetiger Abbildungen beweisen können.

0.8 Lemma:

Es sei (E, P) ein OBR und $f : P \rightarrow P$ eine Abbildung, die eine auf P vollstetige asymptotische Ableitung $f'(\infty)$ besitzt mit

$$f'(\infty)x \neq \lambda x \quad \forall (\lambda, x) \in [1, \infty) \times S^+.$$

Dann gibt es eine Zahl $\rho > 0$, so daß

$$f(x) \neq \lambda x \quad \forall (\lambda, x) \in [1, \infty) \times (P \setminus \rho B).$$

Beweis:

Nehmen wir an, die Behauptung sei nicht richtig, so können wir eine

Folge $(\lambda_n, x_n) \in [1, \infty) \times \dot{P}$ mit

$$f(x_n) = \lambda_n x_n, \quad \|x_n\| \rightarrow \infty$$

finden, und für

$$y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|} \in S^+$$

folgt

$$(0.8.1) \quad \left[\text{id} - \frac{1}{\lambda_n} f'(\infty) \right] y_n = \frac{1}{\lambda_n} \frac{f(x_n) - f'(\infty)x_n}{\|x_n\|} \rightarrow 0.$$

Da $f'(\infty)$ vollstetig ist, können wir wegen $\|y_n\| = 1$ o.E. annehmen, daß die Folge

$$(\sigma_n, z_n) := \left(\frac{1}{\lambda_n}, f'(\infty)y_n \right)$$

in $\mathbb{R} \times E$ gegen einen Grenzwert $(\sigma, z) \in (0, 1] \times \dot{P}$ konvergiert, so

daß wir nach (0.8.1) auch die Konvergenz von $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen σz erhalten, woraus mit der Stetigkeit von $f'(\infty)$ die Gleichung

$$f'(\infty)z = \frac{1}{\sigma} z$$

folgt, die im Widerspruch zu unseren Voraussetzungen steht. $\square$

Mit Hilfe dieses Lemmas kann man einige in [7] geführte Beweise abkürzen. So folgt der erste Teil von [7 , Lemma 13.4] sofort aus [7 , Lemma 12.1 (i)]. Ebenso ergeben sich [7 , Theorem 13.5, Theorem 13.6

(ii) } unmittelbar aus [7 , Theorem 12.2, Theorem 13.2 (i)] .

0.9 Theorem:

Es sei (E,P) ein OBR und $f : P \times \mathbb{R}_+ \rightarrow P$ eine vollstetige Abbildung derart, daß

$$[\text{id} - f(.,0)]^{-1} (\{0\}) = \{0\}$$

und $f(.,0)$ eine asymptotische Ableitung $D_1 f(\infty,0)$ besitzt, für die

$$D_1 f(\infty,0)x \neq \lambda x \quad \forall (\lambda,x) \in [1,\infty) \times S^+$$

gilt.

Dann ist die Zusammenhangskomponente von $(0,0)$ in

$\{(x,\lambda) \in P \times \mathbb{R}_+ \mid f(x,\lambda) = x\}$ unbeschränkt (und besitzt eine nichtleere Projektion auf $(0,\infty)$).

Beweis:

Lemma (0.8) und [7 , Theorem 17.1] .

□

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir noch eine Version eines in [6 , Theorem 2.1] formulierten lokalen Inversionssatzes beweisen, in dem wir mit geringeren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen als in [6] auskommen.

0.10 Theorem:

Es seien E und F reelle Banachräume und W eine offene Teilmenge von $E \times \mathbb{R}$. Die Abbildung $g \in C^1(W,F)$ besitze in $(x_0, \lambda_0) \in W$ eine Nullstelle und eine partielle Ableitung $D_1 g(x_0, \lambda_0)$ mit eindimensionalem Kern E_0 und 1-kodimensionalem Bild F_1 , das den Vektor $y_0 = D_2 g(x_0, \lambda_0)$ nicht enthalte. Schließlich sei $z_0 \in E_0 \setminus \{0\}$ und E_1 ein beliebiges topologisches Komplement von E_0 in E .

Dann gibt es eine offene Teilmenge U_0 von E und ein offenes Intervall I_0 mit $(x_0, \lambda_0) \in U_0 \times I_0 \subset W$, eine Zahl $\varepsilon > 0$ und Abbildungen

$$\tilde{x} \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), U_0)$$

$$\tilde{\lambda} \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), I_0)$$

derart, daß $M := (g|_{U_0 \times I_0})^{-1}(\{0\})$ eine eindimensionale C^1 -Mannig-

faltigkeit in $E \times \mathbb{R}$ mit der Parameterdarstellung $M : (\tilde{x}, \tilde{\lambda})(\sigma), -\varepsilon < \sigma < \varepsilon$,

ist. Dabei läßt sich $\tilde{x}$ in der Form

$$\tilde{x}(\sigma) = x_0 + \sigma z_0 + \tilde{x}_1(\sigma), \quad -\varepsilon < \sigma < \varepsilon,$$

mit einer Abbildung

$$\tilde{x}_1 \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), E_1)$$

darstellen, und der Tangentialvektor in $(\tilde{x}(0), \tilde{\lambda}(0)) = (x_0, \lambda_0)$ ist

$(\tilde{x}'(0), \tilde{\lambda}'(0)) = (z_0, 0)$. Falls (E, P) ein OBR ist, dessen Kegel z_0

als inneren Punkt enthält, so gibt es eine Zahl $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon]$, so daß

$\tilde{x}$ in $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ stark wachsend ist.

Beweis:

Setzen wir $F_0 := \text{span } y_0$, so zerfällt F in die topologische direkte

Summe $F = F_0 + F_1$.

Wir wählen nun eine offene Nullumgebung U_1 in E_1 und eine Zahl

$\varepsilon_1 > 0$ so klein, daß für alle $(x_1, \lambda, \sigma) \in U_1 \times (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)^2$

$$i(x_1, \lambda, \sigma) := (x_0 + \sigma z_0 + x_1, \lambda_0 + \lambda) \in W$$

gilt. Die Abbildung

$$g_0 := g \circ i \in C^1(U_1 \times (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)^2, F)$$

besitzt in $(0, 0, 0)$ eine Nullstelle, und

$$D_{(x_1, \lambda)} g_0(0, 0, 0) = (D_1 g(x_0, \lambda_0)|_{E_1}, y_0) \in \mathcal{L}(E_1 \times \mathbb{R}, F)$$

ist wegen $E = E_0 + E_1$ und $F = F_0 + F_1$ ein linearer Homöomorphismus.

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es daher Zahlen

$\varepsilon, \varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$, eine offene E_1 -Nullumgebung $U_2 \subset U_1$ und eine Abbildung

$$(\mathfrak{R}_1, \hat{\lambda}) \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), U_2 \times (-\varepsilon_2, \varepsilon_2))$$

derart, daß für $V := U_2 \times (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ die Menge $M_0 = (g_0|_V)^{-1}(\{0\})$ eine eindimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit in $E_1 \times \mathbb{R}^2$ mit der Parameterdarstellung

$$M_0 : (\mathfrak{R}_1(\sigma), \hat{\lambda}(\sigma), \sigma), \quad -\varepsilon < \sigma < \varepsilon,$$

ist. Aus der Gleichung

$$g_0(\mathfrak{R}_1(\sigma), \hat{\lambda}(\sigma), \sigma) = 0 \quad \forall \sigma \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

folgt insbesondere, daß

$$(0.10.1) \quad (\mathfrak{R}_1(0), \hat{\lambda}(0)) = (0, 0)$$

gilt, während implizite Differentiation dieser Gleichung nach σ wegen $z_0 \in E_0$ die Beziehung

$$D_{(x_1, \lambda)} g_0(0, 0, 0) (\mathfrak{R}_1'(0), \hat{\lambda}'(0)) = 0$$

und somit

$$(0.10.2) \quad (\mathfrak{R}_1'(0), \hat{\lambda}'(0)) = (0, 0)$$

liefert. Da die Abbildung

$$I : V \rightarrow i(V) =: U_0 \times I_0$$

ein C^∞ -Diffeomorphismus ist, ergeben sich wegen $M = I(M_0)$ mit

$$(\tilde{x}(\sigma), \tilde{\lambda}(\sigma)) := I(\mathfrak{R}_1(\sigma), \hat{\lambda}(\sigma), \sigma), \quad -\varepsilon < \sigma < \varepsilon,$$

alle Behauptungen aus (0.10.1) und (0.10.2). Falls (E, P) ein OBR mit $z_0 \in P$ ist, gibt es wegen der Stetigkeit von $\tilde{x}$ eine Zahl

$\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon]$ derart, daß

$$\tilde{x}'(\sigma) \in P \quad \forall \sigma \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$$

gilt. Dann ist $\tilde{x}$ nach Theorem 0.5 (iii) in $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ stark wachsend.

□

§ 1. Grundlegendes über lineare Evolutionsgleichungen

In einem (reellen oder komplexen) BR X betrachten wir die folgende Situation

$$(H1.1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Für ein } T \in \mathbb{R}_+^* \text{ sei } \{A(t) \mid t \in [0, T]\} \text{ eine} \\ \text{Familie abgeschlossener, dicht definierter Operatoren} \\ \text{in } X \text{ mit } t\text{-unabhängigem Definitionsbereich derart,} \\ \text{daß es eine Konstante } c > 0 \text{ und eine Zahl } \omega \geq 0 \\ \text{gibt mit} \\ \quad \| [\lambda \operatorname{id} + A(t)]^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{c}{1 + |\lambda - \omega|} \\ \text{für alle } \lambda \in \{\mu \in \mathbb{C} \mid \operatorname{re} \mu \geq \omega\} \subset \rho(-A(t)) \text{ und alle} \\ t \in [0, T] \end{array} \right.$$

Dann ist $-A(t)$ für jedes $t \in [0, T]$ Erzeuger einer analytischen Halbgruppe in $\mathcal{L}(X)$, und die von $A_\omega(t) := A(t) + \omega \operatorname{id}$ erzeugten Halbgruppen $\{e^{-sA_\omega(t)} \mid s \geq 0\}$ klingen ab, d.h. es gibt Konstanten

$$(1.1) \quad \gamma_0, \delta_0 > 0 \text{ mit} \\ \|e^{-sA_\omega(t)}\| \leq \gamma_0 e^{-\delta_0 s} \quad \forall s \geq 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Die Ungleichung (1.1) hat zur Folge, daß für jedes $\alpha > 0$ das Integral

$$A_\omega^{-\alpha}(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-sA_\omega(t)} ds$$

in $\mathcal{L}(X)$ konvergiert. Es gilt

$$A_\omega^{-k}(t) = [A_\omega(t)^{-1}]^k \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

und

$$(1.2) \quad A_\omega^{-\alpha}(t) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty s^{-\alpha} R(s; -A_\omega(t)) ds \quad \forall \alpha \in (0, 1).$$

Man zeigt leicht, daß $A_\omega^{-\alpha}(t)$ für jedes $\alpha > 0$ injektiv ist, so daß wir den abgeschlossenen bijektiven linearen Operator

$$A_\omega^\alpha(t) := [A_\omega^{-\alpha}(t)]^{-1}$$

auf

$$D(A_{\omega}^{\alpha}(t)) := A_{\omega}^{-\alpha}(t)(X)$$

definieren können. Mit $A_{\omega}^0(t) := \text{id}_X$ folgt für $-\infty < \alpha \leq \beta < \infty$,

daß

$$D(A_{\omega}^{\beta}(t)) \subset D(A_{\omega}^{\alpha}(t)) ,$$

$$A_{\omega}^{\alpha+\beta}(t)x = A_{\omega}^{\alpha}(t)A_{\omega}^{\beta}(t)x = A_{\omega}^{\beta}(t)A_{\omega}^{\alpha}(t)x \quad \forall x \in D(A_{\omega}^{\beta}(t)) \cap D(A_{\omega}^{\alpha+\beta}(t))$$

und daß zu jedem $\lambda \in [0,1]$ eine positive Konstante $c(\lambda, \alpha, \beta)$ existiert

derart, daß

$$(1.3) \quad \|A_{\omega}^{\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta}(t)x\| \leq c \|A_{\omega}^{\alpha}(t)x\|^{\lambda} \|A_{\omega}^{\beta}(t)x\|^{1-\lambda} \quad \forall x \in D(A_{\omega}^{\beta}(t)) , \\ \forall t \in [0, T] .$$

Die Interpolationsgleichung (1.3) wird Momentengleichung genannt (vgl.

[54, (1.55)]). Als Folgerung aus (1.3) ergibt sich für $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$

die Ungleichung

$$(1.4) \quad \|A_{\omega}^{\alpha}(t)A_{\omega}^{-\beta}(s)\| \leq c(\alpha, \beta) \|A_{\omega}^{-1}(s)\|^{\alpha} \quad \forall t, s \in [0, T]$$

mit einer positiven Konstanten c (vgl. [54, (1.59)]). Versehen wir

für $\alpha \geq 0$ und $t \in [0, T]$ die Definitionsbereiche $D(A_{\omega}^{\alpha}(t))$ mit der

Norm $(A_{\omega}^{\alpha}(t))$ injektiv!

$$\|x\|_{X_{\alpha}(t)} := \|A_{\omega}^{\alpha}(t)x\| \quad \forall x \in D(A_{\omega}^{\alpha}(t)) ,$$

so erhalten wir eine Familie von BR

$$X_{\alpha}(t) := (D(A_{\omega}^{\alpha}(t)) , \|\cdot\|_{X_{\alpha}(t)}) ,$$

bei der wir für $t = 0$ zur Abkürzung das Argument t einfach fortlassen.

Die Voraussetzung

(K) $-A(0)$ besitzt kompakte Resolvente

soll besagen, daß für irgendein $\lambda \in \rho(-A(0))$ (und damit aufgrund der Resolventengleichung für alle $\lambda \in \rho(-A(0))$)

$$R(\lambda; -A(0)) \in \mathcal{K}(X)$$

gilt.

1.1 Lemma:

Für $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ gilt unter der Voraussetzung (H1.1) für alle $t \in [0, T]$

$$X_\beta(t) \xrightarrow{d} X_\alpha(t) \quad .$$

Falls (K) erfüllt ist, folgt

$$A_\omega^{-\alpha}(t) \in \mathcal{K}(X) \quad \forall \alpha > 0 \quad ,$$

und die obigen Einbettungen sind kompakt.

Beweis:

wie in [9, Lemma 2.1] und [46, Theorem 2.9] . $\square$

Die Voraussetzung

$$(H1.2) \quad A \in C^{v_0}([0, T], \mathcal{L}(X_1, X)) \quad \text{für ein } v_0 \in (0, 1)$$

ist offenbar (vgl. [10, (2.1)]) äquivalent zu

$$(1.5) \quad \sup_{\substack{t, s, \tau \in [0, T] \\ t \neq s}} \frac{\| [A(t) - A(s)] A_\omega^{-1}(\tau) \|}{|t - s|^{v_0}} < \infty \quad .$$

Fassen wir nun die Bedingungen (H1.1) und (H1.2) zur Voraussetzung (H1) zusammen und nehmen außerdem an, es gelte die Bedingung

$$(H2') \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Es sei } Y \text{ ein BR und } \alpha_0 \in [0, 1) \text{ derart, daß} \\ \quad X_{\alpha_0} \hookrightarrow Y \hookrightarrow X \\ \text{gilt. Ferner sei } \Lambda \text{ eine nichtleere Teilmenge eines BR } Z \text{ und} \\ \quad G : [0, T] \times \Lambda \rightarrow \mathcal{L}(Y, X) \\ \text{eine stark stetige Abbildung,} \end{array} \right.$$

so wollen wir für $0 \leq \tau < T' \leq T$ die lineare Evolutionsgleichung

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{u}(t) + A(t)u(t) = G(t, \lambda)u(t) + g(t) \quad , \quad t \in (\tau, T'] \\ u(\tau) = x \end{array} \right.$$

¹⁾ Hieraus folgt insbesondere, daß die Räume $X_1(t)$, $t \in [0, T]$, topologisch isomorph sind.

untersuchen, wobei $x \in X$, $g \in C((\tau, T'], X)$ und "'' Differentiation nach t im BR X andeuten soll.

1.2 Definition:

Unter den Voraussetzungen (H1) und (H2') heißt eine Abbildung $u : [\tau, T'] \rightarrow X$ genau dann starke Lösung von (1.6), wenn

$$u \in C([\tau, T'], X) \cap C^1((\tau, T'], X),$$

$$u(t) \in X_1 \quad \forall t \in (\tau, T']$$

und u die Gleichungen (1.6) in X punktweise erfüllt.

Für $\alpha_0 = 0$ ($Y = X$) und $G(t, \lambda) = -\omega \text{Id}_X$ hat P.E. Sobolevskii in [54] das Problem (1.6) untersucht. Seine Ergebnisse (vgl. [54, Theorem 1]) besagen u.a., daß (1.6) in diesem Fall für $g = 0$ eine eindeutig bestimmte starke Lösung $u =: H_\tau^{-\omega} x$ besitzt, da $A_\omega(t)$ den Voraussetzungen [54, (1.15), (1.16)] genügt. Definieren wir für $\sigma \in C([0, T])$ und $x \in X$

$$H_\tau^\sigma x(t) := U_\sigma(t, \tau)x := e^{\int_\tau^t [\omega + \sigma(s)] ds} H_\tau^{-\omega} x(t), \quad t \in [\tau, T],$$

so ist $H_\tau^\sigma : X \rightarrow C([\tau, T], X) \cap C^1((\tau, T], X)$ der Lösungsoperator und $U_\sigma(t, \tau) : X \rightarrow X_1$ für $t \in (\tau, T]$ der Evolutionsoperator zu

$$\dot{u} + A(t)u = \sigma(t)u, \quad t \in (\tau, T]$$

$$u(\tau) = x.$$

Aus der eindeutigen Lösbarkeit dieses Problems ergeben sich die Halbgruppengleichungen

$$(1.7) \quad \begin{cases} U_\sigma(t, \tau) = U_\sigma(t, s)U_\sigma(s, \tau) \\ U_\sigma(\tau, \tau) = \text{Id} \end{cases} \quad \forall 0 \leq \tau \leq s \leq t \leq T$$

In diesen Bezeichnungen lassen wir für $\sigma = 0$ den Index σ einfach weg. Wollen wir das Regularitäts- und Stetigkeitsverhalten von U_σ

untersuchen, so genügt es wegen

$$U_{\sigma}(t, \tau) = e^{\int_{\tau}^t \sigma(s) ds} U(t, \tau),$$

den Evolutionsoperator U zu behandeln.

1.3 Lemma:

Falls (H1) erfüllt ist, so gilt:

$$(i) \quad \sup_{\substack{0 \leq \tau < t \leq T \\ \zeta \in \{\tau, t\}}} (t-\tau)^{\beta-\alpha} \|A_{\omega}^{\beta}(\zeta) U(t, \tau) A_{\omega}^{-\alpha}(\tau)\| < \infty$$

und

$$\sup_{\substack{0 \leq \tau < t \leq T \\ 0 \leq \zeta \leq T}} (t-\tau)^{\beta} \|A_{\omega}^{\beta}(\zeta) U(t, \tau)\| < \infty \quad 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$$

$$(ii) \quad \sup_{\substack{0 \leq \tau \leq s < t \leq T \\ 0 \leq \zeta \leq T}} \frac{(s-\tau)^{\beta-\alpha+\nu} \|A_{\omega}^{\beta}(\zeta) [U(t, \tau) - U(s, \tau)] A_{\omega}^{-\alpha}(\tau)\|}{(t-s)^{\nu}} < \infty$$

$$\forall \beta, \nu \in [0, 1] \quad \text{und} \quad 0 \leq \alpha \leq \beta + \nu < 1 + \nu_0$$

$$(iii) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0+} \sup_{\substack{0 \leq \tau \leq s \leq t \leq T \\ t-s \leq \delta}} \|A_{\omega}^{\alpha}(\tau) [U(t, \tau) - U(s, \tau)] A_{\omega}^{-\alpha}(\tau)\| = 0$$

$$\forall \alpha \in [0, 1], \quad \forall x \in X.$$

Beweis:

Da (ii) für $U_{-\omega}$ anstelle von U bereits in [54, (1.68)] bewiesen wurde, sind nur (i) und (iii) zu zeigen. Die erste Ungleichung in (i) folgt für $\zeta = t$ aus [54, (1.65)], während sie sich für $\zeta = \tau$ und $\alpha = \beta$ mit $\nu = 0$ sofort aus (ii) und der Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|A_{\omega}^{\beta}(\tau) U(t, \tau) A_{\omega}^{-\beta}(\tau)\| \\ & \leq \|A_{\omega}^{\beta}(\tau) [U(t, \tau) - U(\tau, \tau)] A_{\omega}^{-\beta}(\tau)\| + \|id\| \end{aligned}$$

ergibt. Für $\alpha < \beta$ benutzen wir (1.3), (1.4) und (1.5), um aus dem

bisher Bewiesenen die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 & \|A_{\omega}^{\beta}(\tau)U(t,\tau)A_{\omega}^{-\alpha}(\tau)\| \\
 & \leq c_1(\alpha,\beta) \|A_{\omega}(\tau)A_{\omega}^{-1}(t)A_{\omega}(t)U(t,\tau)A_{\omega}^{-\alpha}(\tau)\|^{\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}} \cdot \\
 & \quad \cdot \|A_{\omega}^{\alpha}(\tau)U(t,\tau)A_{\omega}^{-\alpha}(\tau)\|^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} \\
 & \leq c_2(\alpha,\beta) [(t-\tau)^{\alpha-1}]^{\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}} \\
 & = c_2(\alpha,\beta) (t-\tau)^{\alpha-\beta} \quad \forall \quad 0 \leq \tau < t \leq T
 \end{aligned}$$

abzuleiten. Damit ist die erste Ungleichung in (i) bewiesen. Analog zur letzten Abschätzung erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & \|A_{\omega}^{\beta}(\zeta)U(t,\tau)\| \\
 & \leq c_1(\beta) \|A_{\omega}(\zeta)A_{\omega}^{-1}(t)[A_{\omega}(t)U(t,\tau)]\|^{\beta} \|U(t,\tau)\|^{1-\beta} \\
 & \leq c_2(\beta) (t-\tau)^{-\beta} \quad \forall \quad 0 \leq \tau < t \leq T,
 \end{aligned}$$

womit auch die zweite Ungleichung in (i) nachgewiesen ist.

Zum Beweis von (iii) sei $x \in X$, $\alpha \in [0,1]$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.

Eine genaue Analyse des in [32, Theorem 14.1] geführten Beweises ergibt, daß

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \sup_{\tau \in [0,T]} \|A_{\omega}^{-\alpha}(\tau)x - x\| = 0$$

gilt, so daß mit

$$c(\alpha) := \sup_{0 \leq \tau \leq t \leq T} \|A_{\omega}^{\alpha}(\tau)U(t,\tau)A_{\omega}^{-\alpha}(\tau)\|$$

für hinreichend kleines $\beta \in (0, \nu_0)$

$$\sup_{\tau \in [0,T]} \|A_{\omega}^{-\beta}(\tau)x - x\| \leq \frac{\varepsilon}{3c(\alpha)}$$

folgt. Nach (ii) ist

$$c(\alpha,\beta) := \sup_{0 \leq \tau \leq s < t \leq T} \frac{\|A_{\omega}^{\alpha}(\tau)[U(t,\tau)-U(s,\tau)]A_{\omega}^{-(\alpha+\beta)}(\tau)\|}{(t-s)^{\beta}} < \infty$$

und mit

$$\delta := \left(\frac{\varepsilon}{3c(\alpha, \beta) \|x\| + 1} \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

gilt für alle $0 \leq \tau \leq s \leq t \leq T$ mit $t-s \leq \delta$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|A_{\omega}^{\alpha}(\tau) [U(t, \tau) - U(s, \tau)] A_{\omega}^{-\alpha}(\tau)x\| \\ & \leq \|A_{\omega}^{\alpha}(\tau)U(t, \tau)A_{\omega}^{-\alpha}(\tau) [x - A_{\omega}^{-\beta}(\tau)x]\| \\ & \quad + \|A_{\omega}^{\alpha}(\tau) [U(t, \tau) - U(s, \tau)] A_{\omega}^{-(\alpha+\beta)}(\tau)x\| \\ & \quad + \|A_{\omega}^{\alpha}(\tau)U(s, \tau)A_{\omega}^{-\alpha}(\tau) [A_{\omega}^{-\beta}(\tau)x - x]\| \\ & \leq \varepsilon \end{aligned}$$

□

1.4 Korollar:

Falls (H1) gilt, so folgt für $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, $\tau \in [0, t]$ und $\zeta \in [0, T]$

$$(i) \quad H_{\tau} \in \mathcal{L}(X_{\beta}(\tau), C^{\beta-\alpha}([\tau, T], X_{\alpha}(\zeta))) ,$$

wobei $\zeta = \tau$, falls $\alpha = \beta \in (0, 1)$

$$(ii) \quad H_{\tau} \in \mathcal{L}(X_{\alpha}(\tau), L_p([\tau, T], X_{\beta}(\zeta))) \quad p \in [1, \frac{1}{\beta-\alpha})^{1)} .$$

Beweis:

(i) Für $\beta - \alpha < 1$ folgt die Behauptung aus Lemma 1.3 (ii) und (iii).

Da nach [54, Theorem 1] für $x \in X_1$

$$H_{\tau}x \in C^1([\tau, T], X)$$

gilt, folgt sie für $\alpha = 0$ und $\beta = 1$ wegen

$$(H_{\tau}x)'(t) = -A_{\omega}(t)U(t, \tau)A_{\omega}^{-1}(\tau)A_{\omega}(\tau)x + \omega U(t, \tau)x$$

aus Lemma 1.3 (i).

1) Hier sei $\frac{1}{0} := \infty$. Außerdem beachte man, daß das Intervall für $\alpha = 0$, $\beta = 1$ leer ist.

(ii) Falls $p \in [1, \frac{1}{\beta-\alpha})$ ist, so genügt

$$\gamma := \min \left\{ 1, \frac{\beta+\alpha+p}{2} \right\} \in \left[\beta, \alpha + \frac{1}{p} \right) \cap \left[\beta, 1 \right]$$

der Ungleichung $\gamma > \beta$, falls $\beta < 1$ ist, und wir erhalten mit (1.4), (1.5) und Lemma 1.3 (I) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|H_\tau x(t)\|_{X_\beta(\zeta)} &\leq \|A_\omega^\beta(\zeta) A_\omega^{-\gamma}(t)\| \|A_\omega^\gamma(t) U(t, \tau) A_\omega^{-\alpha}(\tau)\| \|x\|_{X_\alpha(\tau)} \\ &\leq c(t-\tau)^{\alpha-\gamma} \|x\|_{X_\alpha(\tau)}. \end{aligned}$$

Wegen $(\alpha-\gamma)p > -1$ folgt die Behauptung. $\square$

Wir wenden uns nun dem inhomogenen Anfangswertproblem (1.6) zu. Falls u starke Lösung von (1.6) mit $G(t, \lambda) = \sigma(t) \text{id}_X$ und $g \in C((\tau, T'], X) \cap L_1((\tau, T'], X)$ ist, so zeigt man leicht, daß für alle $t \in (\tau, T']$

$$\frac{d}{ds} U_\sigma(t, s) u(s) = U_\sigma(t, s) g(s) \quad \forall s \in (\tau, t]$$

und somit wegen der Stetigkeit von $U_\sigma(t, \cdot) u(\cdot)$ und der Absolutstetigkeit des Integrals

$$u(t) - U_\sigma(t, \tau) x = \int_\tau^t U_\sigma(t, s) g(s) ds =: (K_\tau^\sigma g)(t),$$

kurz

$$u = H_\tau^\sigma x + K_\tau^\sigma g$$

gilt. Lassen wir auch hier für $\sigma = 0$ den Index σ einfach fortfallen und setzen wir

$$g_\sigma(t) := e^{-\int_\tau^t \sigma(s) ds} g(t),$$

so genügt es für die Untersuchung der Operatoren K_τ^σ auf den Räumen $L_p((\tau, T'], X)$, $1 \leq p \leq \infty$, wegen

$$(K_\tau^\sigma g)(t) = e^{\int_\tau^t \sigma(s) ds} (K_\tau g_\sigma)(t),$$

den Operator K_τ zu betrachten, dessen Abhängigkeit von p und T'

wir in der Schreibweise vernachlässigen können, wenn wir ihn für $p \in (1, \infty]$ und $T' < T$ als Restriktion eines auf $L_1((\tau, T), X)$ definierten Operators auf den Unterraum

$$\{g \in L_p((\tau, T), X) \mid g(t) = 0 \text{ f.f.a. } t \in (T', T)\}$$

auffassen. Im folgenden Lemma sei p' die zu p duale Potenz

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right).$$

1.5 Lemma:

Es gelte (H1), und es sei $0 \leq \tau < T' \leq T$ und $\zeta \in [0, T]$. Dann gilt:

(i) Falls einer der Fälle

$$(a) \quad 1 < p \leq \infty, \quad \alpha \in (0, \frac{1}{p'})$$

oder

$$(b) \quad 1 \leq p < \infty, \quad \alpha = 0$$

erfüllt ist, so folgt

$$K_\tau \in \mathcal{L}(L_p((\tau, T'), X), C^{\frac{1}{p'} - \alpha}([\tau, T'], X_\alpha(\zeta)))$$

(ii) Für alle $1 \leq p \leq \infty$ gilt:

$$K_\tau \in \mathcal{L}(L_p((\tau, T'), X), L_p((\tau, T'), X_\alpha(\zeta))) \quad \forall \alpha \in [0, 1)$$

Beweis:

(i) Wir müssen lediglich die Fälle

$$(1) \quad p = \infty, \quad \alpha \in (0, 1)$$

und

$$(2) \quad p = 1, \quad \alpha = 0$$

untersuchen. Setzen wir nämlich gemäß Lemma 1.3 (i)

$$c_1(\alpha) := \sup_{\tau \leq s \leq t \leq T} (t-s)^\alpha \|A_\omega^\alpha(\zeta)U(t,s)\|,$$

so folgt die Behauptung (i) für $p \in (1, \infty)$ und $\alpha \in [0, \frac{1}{p'})$ so-

fort aus [54, (2.10)] und der für $g \in L_p((\tau, T'), X)$ mit der

Hölderschen Ungleichung zu beweisenden Abschätzung

$$\begin{aligned} \|K_\tau g(t)\|_{X_\alpha(\zeta)} &\leq c_1(\alpha) \left(\int_\tau^t (t-s)^{-\alpha p'} ds \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\tau^t \|g(s)\|_{L_\infty}^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c \|g\|_{L_p((\tau, T'), X)} \end{aligned}$$

Wir diskutieren zunächst den Fall (i).

Sei $g \in L_\infty((\tau, T'), X)$ und $\tau \leq s \leq t \leq T'$. Falls $s - \tau \leq t - s$ ist, können wir mit der Dreiecksungleichung ganz grob abschätzen:

$$\begin{aligned} \|(K_\tau g)(t) - (K_\tau g)(s)\|_{X_\alpha(\zeta)} &\leq c_1(\alpha) \left[\int_\tau^t (t-r)^{-\alpha} dr + \int_\tau^s (s-r)^{-\alpha} dr \right] \|g\|_{L_\infty} \\ &\leq \frac{c_1(\alpha)}{1-\alpha} \{ [2(t-s)]^{1-\alpha} + (t-s)^{1-\alpha} \} \|g\|_{L_\infty} \\ &= c_2(\alpha) (t-s)^{1-\alpha} \|g\|_{L_\infty} \end{aligned}$$

Falls $s - \tau > t - s$ ist, benutzen wir Lemma 1.3 (i) und (ii)

mit $v \in (1-\alpha, \min\{1, 1 + v_0 - \alpha\})$, um die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|(K_\tau g)(t) - (K_\tau g)(s)\|_{X_\alpha(\zeta)} &\leq \int_\tau^{2s-t} \|A_\omega^\alpha(\zeta) [U(t, r) - U(s, r)] g(r)\| dr \\ &\quad + \int_{2s-t}^t \|A_\omega^\alpha(\zeta) U(t, r) g(r)\| dr \\ &\quad + \int_{2s-t}^s \|A_\omega^\alpha(\zeta) U(s, r) g(r)\| dr \\ &\leq c_3(\alpha) [(t-s)^v \int_\tau^{2s-t} (s-r)^{-(\alpha+v)} dr \\ &\quad + \int_{2s-t}^t (t-r)^{-\alpha} dr + \int_{2s-t}^s (s-r)^{-\alpha} dr] \|g\|_{L_\infty} \\ &\leq c_4(\alpha) (t-s)^{1-\alpha} \|g\|_{L_\infty} \end{aligned}$$

zu erhalten. Außerdem gilt für alle $t \in [\tau, T']$

$$\|K_{\tau}g(t)\|_{X_{\alpha}(\tau)} \leq \frac{c_1(\alpha)\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha} \|g\|_{L_{\infty}},$$

womit die Behauptung im Falle (1) bewiesen ist.

Betrachten wir den Fall (2), so ergibt sich für $g \in L_1((\tau, T'), X)$ aus Lemma 1.3 (i) die Abschätzung

$$(1.5.1) \quad \|K_{\tau}g(t)\| \leq c \int_{\tau}^t \|g(s)\| ds \quad \forall t \in [\tau, T'].$$

Für ein beliebig kleines festes $\rho_0 \in (0, T' - \tau]$ seien die Abbildungen

$$v_{\rho}(t) := \int_{\tau}^{t-\rho} U(t, s)g(s)ds \quad \forall t \in [\tau + \rho_0, T'], \quad \rho \in (0, \rho_0]$$

definiert. Wählen wir $\alpha = \beta = 0$ und $v = \frac{1}{2}$ in Lemma 1.3 (i) und (ii), so erhalten wir für $\tau + \rho_0 \leq s \leq t \leq T'$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|v_{\rho}(t) - v_{\rho}(s)\| &\leq \int_{\tau}^{s-\rho} \|U(t, r) - U(s, r)\| \|g(r)\| dr + \int_{s-\rho}^{t-\rho} \|U(t, r)\| \|g(r)\| dr \\ &\leq c_1 \left(\frac{t-s}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\tau}^{s-\rho} \|g(r)\| dr + c_2 \int_{s-\rho}^{t-\rho} \|g(r)\| dr. \end{aligned}$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ können wir nun aufgrund der Integrierbarkeit von g und der Absolutstetigkeit des Integrals ein $\delta > 0$ finden, so daß für $t - s \leq \delta$ keiner der beiden Summanden den Wert $\frac{\varepsilon}{2}$ überschreitet. Somit gilt

$$v_{\rho} \in C([\tau + \rho_0, T'], X) \quad \forall \rho \in (0, \rho_0].$$

Da $K_{\tau}g$ wegen der Absolutstetigkeit des Integrals gleichmäßiger Grenzwert von v_{ρ} auf $[\tau + \rho_0, T']$ für $\rho \rightarrow 0+$ ist, ist auch $K_{\tau}g$ auf diesem Intervall stetig. Wählt man ρ_0 beliebig klein, so ergibt sich die Stetigkeit von $K_{\tau}g$ auf $(\tau, T']$. Daß $K_{\tau}g$ auch in $t = \tau$ stetig ist, folgt wegen $K_{\tau}g(\tau) = 0$ sofort aus der Absolutstetigkeit des Integrals und der Ungleichung (1.5.1), die uns auch die behauptete Stetigkeitsaussage für K_{τ} im Falle (2) liefert.

(ii) Es sei $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha \in [0,1)$ und $g \in L_p((\tau, T'), X)$. Während für $p = \infty$ die Behauptung sofort aus der elementaren Abschätzung

$$\begin{aligned} \|K_\tau g(t)\|_{X_\alpha(\tau)} &\leq c_1(\alpha) \int_\tau^t (t-s)^{-\alpha} ds \|g\|_{L_\infty} \\ &\leq \frac{c_1(\alpha) T^{1-\alpha}}{1-\alpha} \|g\|_{L_\infty} \end{aligned}$$

folgt, benutzen wir für $p \in [1, \infty)$ die Höldersche Ungleichung,

$$\begin{aligned} \|K_\tau g(t)\|_{X_\alpha(\tau)} &\leq c_1(\alpha) \int_\tau^t (t-s)^{-\alpha} \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{p}\right) \|g(s)\| ds \\ &\leq c_1(\alpha) \left[\int_\tau^t (t-s)^{-\alpha} ds \right]^{\frac{1}{p'}} \left[\int_\tau^t (t-s)^{-\alpha} \|g(s)\|^p ds \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c_1(\alpha) \left[\frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\tau^t (t-s)^{-\alpha} \|g(s)\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

zu erhalten. Hieraus ergibt sich mit Fubinis Satz

$$\begin{aligned} \int_\tau^{T'} \|K_\tau g(t)\|_{X_\alpha(\tau)}^p dt &\leq c_1(\alpha)^p \left[\frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]^{\frac{p}{p'}} \int_\tau^{T'} \int_s^{T'} (t-s)^{-\alpha} dt \|g(s)\|^p ds \\ &\leq \left[\frac{c_1(\alpha) T^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]^p \|g\|_{L_p}^p. \end{aligned}$$

□

Daß für $G(t, \lambda) = -\omega \operatorname{id}_X$ durch $u = H_\tau^{-\omega} x + K_\tau^{-\omega} g$ eine starke Lösung von (1.6) definiert wird, falls $g \in C^V([\tau, T'], X)$ für ein $v \in (0,1)$ gilt, wurde in [54, § 2.1] bewiesen. Wir benötigen eine etwas allgemeinere Aussage.

1.6 Satz:

Es gelte (H1), und es sei $G(t, \lambda) = \sigma(t) \text{id}_X$ mit $\sigma \in C([0, T])$.

Dann besitzt (1.6) für jedes $x \in X$ und $g \in C^V((\tau, T'], X) \cap L_1((\tau, T'), X)$, $v \in (0, 1)$, genau eine starke Lösung u , und sie läßt sich durch $u = H_\tau^\sigma x + K_\tau^\sigma g$ explizit darstellen. Für $x \in X_1$ und $g \in C^V([\tau, T'], X)$ gilt sogar $u \in C^1([\tau, T'], X)$.

Beweis:

Für $x \in X$ und $g \in C^V((\tau, T'], X) \cap L_1((\tau, T'), X)$ ergibt sich aus Korollar 1.4 (i) und Lemma 1.5, daß

$$u := H_\tau^\sigma x + K_\tau^\sigma g \in C([\tau, T'], X)$$

gilt. Aus den Halbgruppengleichungen (1.7) folgert man für $\rho \in (\tau, T')$ die Identität

$$u|_{[\rho, T']} = H_\rho^\sigma [u(\rho)] + K_\rho^\sigma g.$$

Die vor diesem Satz zitierten Ergebnisse von P. E. Sobolevskii implizieren, daß die Abbildung $K_\rho^\sigma g \in C^1((\rho, T'], X)$ ihre Werte in X_1 hat. Da dies auch für $H_\rho^\sigma [u(\rho)] \in C^1((\rho, T'], X)$ gilt und ρ beliebig nahe an τ gewählt werden kann, ist u starke Lösung von (1.6). Die Eindeutigkeit der Lösung folgt aus der eindeutigen Lösbarkeit der homogenen Gleichung. Für $x \in X_1$ und $g \in C^V([\tau, T'], X)$ ist u gemäß [54, Theorem 4] auch in $t = \tau$ stetig differenzierbar.

□

Wir wollen (1.6) nun unter der allgemeinen Voraussetzung (H2') untersuchen. Im allgemeinen wird es keine starken Lösungen geben. Setzen wir jedoch

$$[\bar{G}(\lambda)h](t) := G(t, \lambda)h(t) \quad \forall h \in L_1((\tau, T'), Y)$$

und beachten wir Korollar 1.4 (ii) und Lemma 1.5, so genügt z.B. für

$x \in X$ und $g \in C([\tau, T'], X)$ jede starke Lösung $u \in C([\tau, T'], Y)$ von (1.6) nach unseren im Anschluß an Korollar 1.4 geführten Überlegungen der linearen Fixpunktgleichung

$$u = H_\tau x + K_\tau [\bar{G}(\lambda)u + g] \quad ,$$

d.h.

$$(1.8) \quad [id - K_\tau \bar{G}(\lambda)] u = H_\tau x + K_\tau g$$

in $L_1((\tau, T'), X_{\alpha_0})$. Wir kommen so in natürlicher Weise zur folgenden Definition.

1.7 Definition:

Es gelte (H1) und (H2'). Für $x \in X$ und $g \in C([\tau, T'], X)$ heißt jede Abbildung $u \in L_1((\tau, T'), Y)$, die der Gleichung (1.8) in $L_1((\tau, T'), Y)$ genügt, eine *milde Lösung* von (1.6).

Da es nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit zu jeder kompakten (insbesondere jeder einpunktigen) Teilmenge von Λ eine Λ -Umgebung Λ_0 mit

$$(1.9) \quad \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ \lambda \in \Lambda_0}} \|G(t, \lambda)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} < \infty$$

gibt, so folgt für jede milde Lösung u von (1.6) nach Lemma 1.5 (i)(b), daß

$$K_\tau [\bar{G}(\lambda)u + g] \in C([\tau, T'], X)$$

und somit wegen Korollar 1.4 (i)

$$u \in C([\tau, T'], X)$$

gilt.

Um die Gleichung (1.8) in geeigneten Räumen zu lösen, benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

1.8 Lemma:

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Dann gilt

$$\int_a^b (b-s)^{\alpha-1} (s-a)^{\beta-1} ds = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (b-a)^{\alpha+\beta-1}.$$

Beweis:

[45, § 17, 90] .

□

1.9 Lemma:

Unter den Voraussetzungen (H1) und (H2') folgt

- (i) Ist Λ_0 eine nichtleere Teilmenge von Λ , für die (1.9) gilt, so gibt es eine Funktion $c : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, so daß für alle $0 \leq \tau \leq t \leq T' \leq T$, $g \in L_1((\tau, T'), Y)$, $\lambda \in \Lambda_0$, $\alpha \in [0,1]$, $\zeta \in [0, T]$ und $k \in \mathbb{N}^*$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \| [K_\tau \bar{G}(\lambda)]^k g(t) \|_{X_\alpha(\zeta)} \\ & \leq c(\alpha) \frac{[\|A_\omega^{-\alpha}(0) \|_{\mathcal{L}(X,Y)} c(\alpha_0)]^{k-1}}{\Gamma((k-1)(1-\alpha_0) + 1 - \alpha)} \int_\tau^t (t-s)^{(k-1)(1-\alpha_0)-\alpha} \|g(s)\|_Y ds \end{aligned}$$

gilt (c unabhängig von $\tau, T', g, t, \lambda, \alpha, \zeta$ und k).

- (ii) Für $0 \leq \tau < T' \leq T$, $\lambda \in \Lambda$ und $1 \leq p \leq \infty$ ist $K_\tau \bar{G}(\lambda)$ Volterra-Operator in $L_p((\tau, T'), Y)$.

Beweis:

- (i) Da gemäß Lemma 1.3 (i)

$$c_1(\alpha) := \sup_{\substack{0 \leq s \leq t \leq T \\ 0 \leq \zeta \leq T}} (t-s)^\alpha \|A_\omega^\alpha(\zeta) U(t,s)\|$$

für $\alpha \in [0,1]$ endlich ist, können wir

$$c(\alpha) := c_1(\alpha) \Gamma(1-\alpha) \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ \lambda \in \Lambda_0}} \|G(t, \lambda)\|_{\mathcal{L}(Y, X)}$$

definieren. Dann folgt die Behauptung für $k = 1$ unmittelbar. Wir führen nun einen Induktionsschluß von k nach $k + 1$ durch. Mit den Abkürzungen

$$Q = K_\tau \overline{G}(\lambda) \quad , \quad c_0 := \|A_\omega^{-\alpha}(0)\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$$

schätzen wir ab:

$$\|Q^{k+1}g(t)\|_{X_\alpha(\zeta)} \leq \frac{c(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\tau^t (t-s)^{-\alpha} \|Q^k g(s)\|_Y ds \quad .$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} \|Q^k g(s)\|_Y &= \|A_\omega^{-\alpha}(0) A_\omega^{\alpha}(0) Q^k g(s)\|_Y \leq c_0 \|Q^k g(s)\|_{X_{\alpha_0}} \\ &\leq \frac{\{c_0 c(\alpha_0)\}^k}{\Gamma(k(1-\alpha_0))} \int_\tau^s (s-r)^{k(1-\alpha_0)-1} \|g(r)\|_Y dr \quad . \end{aligned}$$

Setzt man diese Ungleichung in die obige Abschätzung ein und verwendet man nach dem Vertauschen der Integrationsreihenfolge Lemma 1.8, so folgt die Behauptung für $k + 1$.

(ii) Sei $0 \leq \tau < \tau' \leq T$ und $\lambda \in \Lambda$. Wegen (1.9) ist

$$\overline{G}(\lambda) \in \mathcal{L}(L_p((\tau, \tau'), Y), L_p((\tau, \tau'), X)) \quad ,$$

so daß nach Lemma 1.5 (ii) wegen $L_p((\tau, \tau'), X_{\alpha_0}) \hookrightarrow L_p((\tau, \tau'), Y)$ folgt, daß $Q = K_\tau \overline{G}(\lambda)$ ein beschränkter linearer Operator in $L_p((\tau, \tau'), Y)$ ist.

Im Falle $p = \infty$ ergibt sich die Behauptung sofort aus (i), da

$$\begin{aligned} \|Q^k g(t)\|_Y &\leq c_0 \|Q^k g(t)\|_{X_{\alpha_0}} \\ &\leq \frac{\{c_0 c(\alpha_0)\}^k}{\Gamma(k(1-\alpha_0))} \frac{(t-\tau)^{k(1-\alpha_0)}}{k(1-\alpha_0)} \|g\|_{L_\infty((\tau, \tau'), Y)} \\ &\leq \frac{\{c_0 c(\alpha_0) T^{1-\alpha_0}\}^k}{\Gamma(k(1-\alpha_0) + 1)} \|g\|_{L_\infty((\tau, \tau'), Y)} \end{aligned}$$

und

$$(1.9.1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma(k(1-\alpha_0) + 1)^{-\frac{1}{k}} = 0$$

gilt. Setzen wir für $k \in \mathbb{N}^*$

$$\beta_k := k(1-\alpha_0)$$

und

$$c_k := \frac{[c_0 c(\alpha_0)]^k}{\Gamma(\beta_k)},$$

so können wir im Falle $p \in [1, \infty)$ mit (i) und der Hölderschen

Ungleichung abschätzen

$$\begin{aligned} \|Q^k g(t)\|_Y &\leq c_k \int_{\tau}^t (t-s)^{\frac{1}{p}-1} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p}(\beta_k - 1)\right) \|g(s)\|_Y ds \\ &\leq c_k \left[\int_{\tau}^t (t-s)^{\beta_k - 1} ds \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\tau}^t (t-s)^{\beta_k - 1} \|g(s)\|_Y^p ds \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c_k \left[\frac{T^{\beta_k}}{\beta_k} \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\tau}^t (t-s)^{\beta_k - 1} \|g(s)\|_Y^p ds \right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} &\int_{\tau}^{T^1} \|Q^k g(t)\|_Y^p dt \\ &\leq c_k^p \left[\frac{T^{\beta_k}}{\beta_k} \right]^{p-1} \int_{\tau}^{T^1} \frac{(T^1-s)^{\beta_k}}{\beta_k} \|g(s)\|_Y^p ds \\ &\leq c_k^p \left[\frac{T^{\beta_k}}{\beta_k} \right]^p \|g\|_{L_p((\tau, T^1), Y)}^p, \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \|Q^k g\|_{L_p((\tau, T^1), Y)} &\leq \frac{c_k T^{\beta_k}}{\beta_k} \|g\|_{L_p((\tau, T^1), Y)} \\ &= \frac{[c_0 c(\alpha_0) T^{1-\alpha_0}]^k}{\Gamma(k(1-\alpha_0) + 1)} \|g\|_{L_p}. \end{aligned}$$

Aus (1.9.1) ergibt sich die Behauptung. $\square$

1.10 Korollar

Es gelte (H1) und (H2'), und es sei $\alpha \in [0,1]$ und $0 \leq \tau < T' \leq T$ vorgegeben. Dann besitzt (1.6) für $x \in X_\alpha(\tau)$ und $g \in C([\tau, T'], X)$ genau eine milde Lösung u , und es gilt $u \in C([\tau, T'], X_\alpha(\tau))$.

Beweis:

Wir wählen $p \in (1, \infty)$ so, daß $p(\alpha_0 - \alpha) < 1 < p(1 - \alpha)$ gilt. Nach Korollar 1.4 und Lemma 1.5 (ii) ist

$$H_\tau x + K_\tau g \in L_p((\tau, T'), X_{\alpha_0}) \hookrightarrow L_p((\tau, T'), Y).$$

Folglich besitzt die Gleichung (1.8) nach Lemma 1.9 (ii) genau eine Lösung

$$u = [Id - K_\tau \bar{G}(\lambda)]^{-1} (H_\tau x + K_\tau g) \in L_p((\tau, T'), Y).$$

Wegen $\bar{G}(\lambda)u + g \in L_p((\tau, T'), X)$ folgt aus Lemma 1.5 (i) und Korollar 1.4 (i), daß

$$u = H_\tau x + K_\tau [\bar{G}(\lambda)u + g] \in C([\tau, T'], X_\alpha(\tau))$$

gilt. □

Definieren wir unter den Voraussetzungen (H1) und (H2') für

$0 \leq \tau < T' \leq T$ und $\lambda \in \Lambda$ die Operatoren

$$(1.10) \quad H_\tau \bar{G}(\lambda) := U_{\bar{G}(\lambda)}(\cdot, \tau) := [Id - K_\tau \bar{G}(\lambda)]^{-1} \circ H_\tau = \sum_{k=0}^{\infty} [K_\tau \bar{G}(\lambda)]^k H_\tau$$

auf X und

$$(1.11) \quad K_\tau \bar{G}(\lambda) := [Id - K_\tau \bar{G}(\lambda)]^{-1} \circ K_\tau = \sum_{k=0}^{\infty} [K_\tau \bar{G}(\lambda)]^k K_\tau$$

auf $C([\tau, T'], X)$, so besitzt die in Korollar 1.10 nachgewiesene milde Lösung u von (1.6) die Darstellung

$$u = H_\tau \bar{G}(\lambda)x + K_\tau \bar{G}(\lambda)g.$$

Daraus ergeben sich für den verallgemeinerten Evolutionsoperator $U_{\bar{G}(\lambda)}$

natürlich wieder die Halbgruppengleichungen

$$(1.12) \quad \begin{cases} U_{\overline{G}(\lambda)}(t, \tau) = U_{\overline{G}(\lambda)}(t, s) U_{\overline{G}(\lambda)}(s, \tau) \\ U_{\overline{G}(\lambda)}(\tau, \tau) = \text{id}_X \end{cases} \quad 0 \leq \tau \leq s \leq t \leq T,$$

und es gilt $H_{\tau}^{\overline{O}} = H_{\tau}$ und $K_{\tau}^{\overline{O}} = K_{\tau}$.

Im folgenden Lemma wollen wir ein wichtiges Analogon zu Lemma 1.3 (i), (ii) beweisen.

1.11 Lemma:

Es gelte (H1) und (H2'), und es sei Λ_0 eine nichtleere Teilmenge von Λ mit (1.9). Dann folgt für $0 \leq \alpha \leq \beta < 1$:

$$\sup_{\substack{0 \leq \tau < t \leq T \\ \lambda \in \Lambda_0, \zeta \in \{\tau, t\}}} (t-\tau)^{\beta-\alpha} \|A_{\omega}^{\beta}(\zeta) U_{\overline{G}(\lambda)}(t, \tau) A_{\omega}^{-\alpha}(\tau)\| < \infty,$$

$$\sup_{\substack{0 \leq \tau < t \leq T \\ \lambda \in \Lambda_0, \xi \in [0, T]}} (t-\tau)^{\beta} \|A_{\omega}^{\beta}(\xi) U_{\overline{G}(\lambda)}(t, \tau)\| < \infty$$

und

$$\sup_{\substack{0 \leq \tau \leq s < t \leq T \\ \lambda \in \Lambda_0, \xi \in [0, T]}} \frac{(s-\tau)^{\beta-\alpha+\mu} \|A_{\omega}^{\beta}(\xi) [U_{\overline{G}(\lambda)}(t, \tau) - U_{\overline{G}(\lambda)}(s, \tau)] A_{\omega}^{-\alpha}(\tau)\|}{(t-s)^{\mu}} < \infty$$

$$\forall \mu \in [0, 1] \cap [0, 1 + \nu_0 - \beta].$$

Beweis:

Wählen wir $\gamma \in (\max\{\alpha, \alpha_0\}, 1)$, so existiert nach (1.3), (1.4) und

Lemma 1.3 (i) die Konstante

$$c(\gamma, \alpha) := \|A_{\omega}^{-\alpha_0}(0)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \sup_{0 \leq \tau < t \leq T} (\|A_{\omega}^{\alpha_0}(0) A_{\omega}^{-\gamma}(t)\| (t-\tau)^{\gamma-\alpha} \|A_{\omega}^{\gamma}(t) U(t, \tau) \cdot A_{\omega}^{-\alpha}(\tau)\|),$$

und es gilt

$$\|U(t, \tau)\|_{\mathcal{L}(X_\alpha(\tau), Y)} \leq c(\gamma, \alpha) (t-\tau)^{\alpha-\gamma} \quad 0 \leq \tau < t \leq T.$$

Für $\tau \in [0, T)$ und $\lambda \in \Lambda_0$ gilt

$$H_\tau \bar{G}(\lambda) - H_\tau = \sum_{k=1}^{\infty} [K_\tau \bar{G}(\lambda)]^k H_\tau.$$

Schätzen wir die einzelnen Summanden dieser Reihe gemäß Lemma 1.9 (i) ab, so erhalten wir für $x \in X$ und $\zeta \in [0, T]$ mit Hilfe von Lemma 1.8 und den im Beweis von Lemma 1.9 eingeführten Abkürzungen

$$(1.11.1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \| [[K \bar{G}(\lambda)]^k \circ H_\tau] (A_\omega^{-\alpha}(\tau)x) \|_{X_\beta(\zeta)} \\ & \leq c(\beta) c(\gamma, \alpha) \frac{[c_0 c(\alpha_0)]^{k-1}}{\Gamma((k-1)(1-\alpha_0)+1-\beta)} \int_\tau^t (t-s)^{(k-1)(1-\alpha_0)-\beta} (s-\tau)^{\alpha-\gamma} ds \|x\| \\ & \leq c(\alpha, \beta, \gamma) \frac{[c_0 c(\alpha_0) T^{1-\alpha_0}]^{k-1}}{\Gamma((k-1)(1-\alpha_0)+1-\beta+1-\gamma+\alpha)} (t-\tau)^{\alpha-\beta} \|x\| \end{aligned} \right.$$

Da die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[c_0 c(\alpha_0) T^{1-\alpha_0}]^{k-1}}{\Gamma((k-1)(1-\alpha_0)+1-\beta+1-\gamma+\alpha)}$$

konvergiert und $A_\omega^\beta(\zeta)$ abgeschlossen ist, ergibt sich

$$\sup_{\substack{0 \leq \tau \leq t \leq T \\ \lambda \in \Lambda_0}} (t-\tau)^{\beta-\alpha} \|A_\omega^\beta(\zeta) [U_{\bar{G}(\lambda)}(t, \tau) - U(t, \tau)] A_\omega^{-\alpha}(\tau)\| < \infty,$$

woraus wir mit Lemma 1.3 (i), (ii) und der Dreiecksungleichung sofort die Behauptung folgern.

□

Analog zur Abschätzung (1.11.1) erhält man für $0 \leq \tau \leq s \leq t \leq T' \leq T$ und $g \in C([\tau, T'], X)$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
& \| ([K_S \bar{G}(\lambda)]^k H_S(g(s)))(t) \| \\
& \leq c(0) c_0 c_1 (\alpha_0) \frac{[c_0 c(\alpha_0)]^{k-1}}{\Gamma((k-1)(1-\alpha_0)+1)} \int_s^t (t-r)^{(k-1)(1-\alpha_0)} (r-s)^{-\alpha_0} dr \|g(s)\| \\
& \leq \frac{c(0) c_1 (\alpha_0) \Gamma(1-\alpha_0)}{c(\alpha_0)} \frac{[c_0 c(\alpha_0) T^{1-\alpha_0}]^k}{\Gamma(k(1-\alpha_0)+1)} \|g(s)\|,
\end{aligned}$$

aus der wir wegen der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[c_0 c(\alpha_0) T^{1-\alpha_0}]^k}{\Gamma(k(1-\alpha_0)+1)}$$

nach dem Satz über majorierte Konvergenz schließen können, daß die Reihe

$$U_{\bar{G}(\lambda)}(t-s)g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} ([K_S \bar{G}(\lambda)]^k H_S(g(s)))(t)$$

über dem Intervall $[\tau, t]$ gliedweise nach s integriert werden darf.

Für $k = 0$ ist die Formel

$$\int_{\tau}^t ([K_S \bar{G}(\lambda)]^k H_S(g(s)))(t) ds = ([K_{\tau} \bar{G}(\lambda)]^k K_{\tau} g)(t)$$

nach Definition von K_{τ} richtig. Da mit dem Satz von Fubini auch der Induktionsschluß von k auf $k+1$ gelingt, ergibt sich die *Duhamel'sche Formel*

$$(1.13) \quad \int_{\tau}^t U_{\bar{G}(\lambda)}(t,s)g(s)ds = \sum_{k=0}^{\infty} ([K_{\tau} \bar{G}(\lambda)]^k K_{\tau} g)(t) = K_{\tau}^{\bar{G}(\lambda)} g(t),$$

die für $G(t, \lambda) = \sigma(t)Id_X$ mit der Definition von $K_{\tau}^{\sigma} g(t)$ übereinstimmt, wenn dies für $H_{\tau}^{\sigma} Id$ und $H_{\tau}^{\sigma} g$ gilt. In der Tat wird sich diese Übereinstimmung aus dem nächsten Lemma ergeben. Da die λ -Abhängigkeit von G für die nun folgenden Überlegungen völlig unwesentlich ist, wollen wir für den Rest dieses Paragraphen annehmen, G sei nur von t abhängig.

1.12 Lemma:

Falls (H1) und (H2') gilt, so folgt für jede Funktion $\sigma \in C([0, T])$

$$\overline{U_{\overline{G} + \sigma \text{id}}}(t, \tau) = e^{\int_{\tau}^t \sigma(s) ds} \overline{U_{\overline{G}}}(t, \tau) \quad 0 \leq \tau \leq t \leq T.$$

Beweis:

Da für $x \in X$ durch

$$u(t) = e^{\int_{\tau}^t \sigma(s) ds} U(t, \tau)x \quad \forall t \in [\tau, T]$$

eine starke Lösung von

$$\dot{u} + A(t)u = \sigma(t)u$$

$$u(\tau) = x$$

definiert wird und $\sigma u \in C([\tau, T], X)$ ist, folgt aus den Vorbemerkungen zu Lemma 1.5 die Darstellungsformel

$$u = H_{\tau}x + K_{\tau}(\sigma u),$$

aus der unsere Behauptung für $G = 0$ folgt. Im allgemeinen Fall genügt

$$u = \overline{H_{\tau} \overline{G} + \sigma \text{id}} x \in L_1((\tau, T), Y)$$

der Gleichung

$$[\text{id} - K_{\tau} \overline{\sigma \text{id}}] u = H_{\tau}x + K_{\tau} \overline{G} u,$$

aus der nach (1.13) und dem ersten Teil des Beweises

$$u = H_{\tau}^{\sigma} x + K_{\tau}^{\sigma} \overline{G} u$$

folgt. Da man trivialerweise wie im Beweis von Lemma 1.9 zeigen kann, daß $K_{\tau}^{\sigma} \overline{G}$ ein Volterraoperator in $L_1((\tau, T), Y)$ ist, erhalten wir die Reihendarstellung

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} [K_{\tau}^{\sigma} \overline{G}]^k H_{\tau}^{\sigma} x.$$

Wegen

$$([K_{\tau}^{\sigma} \overline{G}]^k H_{\tau}^{\sigma} x)(t) = e^{\int_{\tau}^t \sigma(s) ds} ([K_{\tau} \overline{G}]^k H_{\tau} x)(t)$$

(vollst. Ind.) ergibt sich aus dieser Gleichung die Behauptung. $\square$

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir für den Fall, daß die Operatoren A und G T -periodisch bzgl. t auf $\mathbb{R}_{+}$ fortsetzbar sind, einen Zusammenhang zwischen dem globalen Wachstum des Evolutionsoperators $U_{\overline{G}}(t,0)$ und dem Spektralradius $r(U_{\overline{G}}(T,0))$ aufzeigen, der - grob gesprochen - besagt, daß alle milden Lösungen von (1.6) mit $g = 0$ in jedem Raum X_{α} mit beliebig großem $\alpha \in [0,1]$ exponentiell abklingen, falls $r(U_{\overline{G}}(T,0)) < 1$ ist, und zwar umso schneller, je kleiner der Spektralradius ist. Für t -unabhängige Operatoren A und G stellen wir einen Zusammenhang zum Spektrum von $G - A$ her. Man beachte ferner, daß wegen Lemma 1.1 und Lemma 1.11 die Operatoren $U_{\overline{G}}(t,\tau)$ für $0 \leq \tau < t \leq T$ in den Räumen X_{α} , $\alpha \in [0,1]$, kompakt sind, falls zusätzlich zu (H1) und (H2') die Bedingung (K) erfüllt ist.

1.13 Lemma:

Es seien (H1) und (H2') erfüllt, wobei $A(T) = A(0)$ und $G(T) = G(0)$ gelte. Setzt man A und G T -periodisch auf $\mathbb{R}_{+}$ fort, so besitzt die kanonische Fortsetzung des Evolutionsoperators $U_{\overline{G}}$ auf $0 \leq \tau \leq t < \infty$ die folgenden Eigenschaften:

$$(i) \quad U_{\overline{G}}(t+T, \tau+T) = U_{\overline{G}}(t, \tau) \quad \forall \quad 0 \leq \tau \leq t < \infty$$

$$(ii) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\substack{0 \leq \tau \leq t < \infty \\ t - \tau \geq k}} \frac{\ln \|A_{\omega}^{\beta}(0) U_{\overline{G}}(t, \tau) A_{\omega}^{\alpha}(0)\|}{t - \tau} = \frac{1}{T} \ln r(U_{\overline{G}}(T, 0)) =: \omega_0$$

$$\forall \quad \alpha, \beta \in [0, 1]$$

(mit $\ln 0 := -\infty$)

(iii) Für $0 \leq \alpha \leq \beta < 1$ und $\sigma > \omega_0$ gilt

$$\sup_{0 \leq t < \infty} t^{\beta-\alpha} e^{-\sigma t} \|A_{\omega}^{\beta}(0) U_{\bar{G}}(t, 0) A_{\omega}^{-\alpha}(0)\| < \infty$$

und

$$\sup_{0 \leq \tau \leq t < \infty} (t-\tau)^{\beta} e^{-\sigma(t-\tau)} \|A_{\omega}^{\beta}(0) U_{\bar{G}}(t, \tau)\| < \infty .$$

(iv) Falls A und G unabhängig von t sind, so wird durch

$$U(t) := U_{\bar{G}}(t, 0) \quad , \quad t \in \mathbb{R}_+ ,$$

eine analytische Halbgruppe in $\mathcal{L}(X)$ erklärt, deren infinitesimaler Erzeuger der Operator $G - A$ mit dem Definitionsbereich $D(A)$ ist, und es gilt

$$\operatorname{re} \lambda \leq \omega_0 \quad \forall \lambda \in \sigma(G - A) .$$

Ist ferner (K) erfüllt, so wird ω_0 auch durch die Gleichung

$$\omega_0 = \sup_{\lambda \in \sigma_p(G-A)} \operatorname{re} \lambda$$

charakterisiert ($\sup \emptyset := -\infty$). Falls X außerdem ein OBR ist und

$$U(t) \in \mathcal{L}^+(X) \quad \forall t \geq 0$$

gilt, so ist ω_0 ein Eigenwert von $G - A$ mit zugehörigem positiven Eigenvektor, falls ω_0 endlich ist.

Beweis:

(i) Für $\tau \geq 0$ und $x \in X$ setzen wir

$$u(t) := U_{\bar{G}}(t+\tau, \tau+\tau)x \quad \forall t \in [\tau, \infty) .$$

Falls $G = 0$ ist, so folgt

$$\dot{u} = -A(t+\tau)u = -A(t)u \quad \forall t > \tau$$

$$u(\tau) = x ,$$

und die Behauptung ergibt sich aus der eindeutigen Lösbarkeit dieses Anfangswertproblems. Im allgemeinen Fall gilt

$$\begin{aligned}
 u(t) &= U(t+T, \tau+T)x + \int_{\tau+T}^{t+T} U(t+T, s) G(s) U_{\overline{G}}(s, \tau+T) x ds \\
 &= U(t+T, \tau+T)x + \int_{\tau}^t U(t+T, s+T) G(s+T) u(s) ds \quad .
 \end{aligned}$$

Benutzt man die Behauptung für $G = 0$ und die T -Periodizität von G , so folgt, daß u auf jedem kompakten Teilintervall $[\tau, T']$ von (τ, ∞) der Integralgleichung

$$u = H_{\tau} x + K_{\tau} \overline{G} u$$

genügt, deren eindeutige Lösung gemäß Lemma 1.9 (ii) die Abbildung $u = H_{\tau}^{\overline{G}} x$ ist.

(ii) Wir schreiben zur Abkürzung $A_{\omega} := A_{\omega}(0)$.

Nach Lemma 1.11 existiert für $\alpha, \beta \in [0, 1]$ die Konstante

$$c(\alpha, \beta) := \sup_{0 \leq s \leq T} \|U_{\overline{G}}(T, s) A_{\omega}^{-\alpha}\| \sup_{T \leq t \leq 2T} \|A_{\omega}^{\beta} U_{\overline{G}}(t, 0)\| \quad .$$

Für $0 \leq \tau < t$ mit $t - \tau \geq 3T$ setzen wir

$$m := \left\lfloor \frac{\tau}{T} \right\rfloor, \quad n := \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor$$

und erhalten aus den Gleichungen (vgl. (i) und (1.12))

$$A_{\omega}^{\beta} U_{\overline{G}}(t, \tau) A_{\omega}^{-\alpha} = A_{\omega}^{\beta} U_{\overline{G}}(t - (n-1)T, 0) U_{\overline{G}}(T, 0)^{n-m-2} U_{\overline{G}}(T, \tau - mT) A_{\omega}^{-\alpha}$$

und

$$U_{\overline{G}}(T, 0)^{n-m+2} = U_{\overline{G}}(T, t - nT) A_{\omega}^{-\beta} A_{\omega}^{\beta} U_{\overline{G}}(t, \tau) A_{\omega}^{-\alpha} A_{\omega}^{\alpha} U_{\overline{G}}(\tau - (m-1)T, 0)$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c(\beta, \alpha)} \|U_{\overline{G}}(T, 0)^{n-m+2}\| \\
 \leq \|A_{\omega}^{\beta} U_{\overline{G}}(t, \tau) A_{\omega}^{-\alpha}\| \leq c(\alpha, \beta) \|U_{\overline{G}}(T, 0)^{n-m-2}\| \quad ,
 \end{aligned}$$

die logarithmiert und nach anschließender Division durch $t - \tau$ auf die Ungleichung

$$\begin{aligned}
& \frac{(n-m+2)T}{t-\tau} \frac{1}{T} \ln \|U_{\bar{G}}(T,0)^{n-m+2}\| - \frac{\ln c(\beta,\alpha)}{t-\tau} \\
& \leq \frac{\ln \|A_{\omega}^{\beta} U_{\bar{G}}(t,\tau) A_{\omega}^{-\alpha}\|}{t-\tau} \\
& \leq \frac{(n-m-2)T}{t-\tau} \frac{1}{T} \ln \|U_{\bar{G}}(T,0)^{n-m-2}\| + \frac{\ln c(\alpha,\beta)}{t-\tau}
\end{aligned}$$

führt, aus der für $t - \tau \geq k \rightarrow \infty$ die Behauptung folgt.

(iii) Es sei $0 \leq \alpha \leq \beta < 1$. Wählen wir $\sigma > \omega_0$, so gibt es nach (ii) eine Zahl $k_0(\sigma) \in \mathbb{N}^*$ derart, daß

$$\sup_{\substack{0 \leq \tau \leq t < \infty \\ t - \tau \geq k_0}} \frac{\ln \|A_{\omega}^{\beta} U_{\bar{G}}(t,\tau) A_{\omega}^{-\alpha}\|}{t - \tau} \leq \frac{\sigma + \omega_0}{2}$$

und

$$(\beta - \alpha) \frac{\ln t}{t} \leq \frac{\sigma - \omega_0}{2} \quad \forall t \geq k_0$$

gilt, so daß für $0 \leq \tau \leq t$ mit $t - \tau \geq k_0$

$$(1.13.1) \quad \|A_{\omega}^{\beta} U_{\bar{G}}(t,\tau) A_{\omega}^{-\alpha}\| \leq (t-\tau)^{\alpha-\beta} e^{\sigma(t-\tau)}$$

folgt. Nach Lemma 1.11 sind die Konstanten

$$c_1(\sigma) := 1 + e^{|\sigma|k_0} \sup_{0 \leq t \leq k_0} t^{\beta-\alpha} \|A_{\omega}^{\beta} U_{\bar{G}}(t,0) A_{\omega}^{-\alpha}\|$$

und

$$c_2(\sigma) := 1 + e^{|\sigma|k_0} \sup_{0 \leq \tau \leq t \leq k_0 + T} (t-\tau)^{\beta} \|A_{\omega}^{\beta} U_{\bar{G}}(t,\tau)\|$$

endlich, so daß wir mit (1.13.1) für alle $t \in \mathbb{R}_+$ die Ungleichung

$$\|A_{\omega}^{\beta} U_{\bar{G}}(t,0) A_{\omega}^{-\alpha}\| t^{\beta-\alpha} e^{-\sigma t} \leq c_1(\sigma)$$

und für $0 \leq \tau \leq t < \infty$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \|A_{\omega}^{\beta} U_{\bar{G}}(t,\tau)\| (t-\tau)^{\beta-\alpha} e^{-\sigma(t-\tau)} \\
& = \|A_{\omega}^{\beta} U_{\bar{G}}(t - [\frac{\tau}{T}]T, \tau - [\frac{\tau}{T}]T)\| \cdot (t-\tau)^{\beta-\alpha} e^{-\sigma(t-\tau)} \\
& \leq c_2(\sigma)
\end{aligned}$$

erhalten, woraus sich die Behauptung (iii) unmittelbar ergibt.

(iv) Falls A und G unabhängig von t sind, so erhalten wir für alle $t, s \in \mathbb{R}_+$ wie im Beweis von (i) die Gleichung

$$U_{\bar{G}}(t+s, s) = U_{\bar{G}}(t, 0) = U(t) \quad ,$$

aus der mit Korollar 1.10 und (1.12) folgt, daß $\{U(t) / t \in \mathbb{R}_+\}$ eine $\mathbb{C}_0$ -Halbgruppe in $\mathcal{L}(X)$ ist. Beachtet man, daß es überflüssig ist, den in [46, Chap. 3, Theorem 2.1, Corollary 2.4] betrachteten Operator B als abgeschlossen vorauszusetzen (man beachte auch, daß G im Sinne von [27, Theorem 13.4.1] eine zulässige Störung ist), so stellt sich heraus, daß diese Halbgruppe analytisch ist und den Operator $G - A$ als Erzeuger besitzt. Benutzt man (iii) für $\alpha = \beta = 0$, so ergibt sich nach dem Satz von Hille-Yosida (vgl. [46, Chap. 1, Corollary 5.3, Remark 5.4]), daß jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{re} \lambda > \omega_0$ in $\rho(G-A)$ liegt, so daß für $\lambda \in \sigma(G-A)$ stets

$$\operatorname{re} \lambda \leq \omega_0$$

folgt. Gilt ferner (K), so erhalten wir aus dem Spektralsatz (vgl. [10, Chap. 2, Corollary 5.3]) und der Kompaktheit von $U(T)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \sigma(U(T)) &= \sigma_p(U(T)) \cup \{0\} \\ &= e^{T\sigma_p(G-A)} \cup \{0\} \quad , \end{aligned}$$

und mit (ii) folgt

$$\begin{aligned} e^{T\omega_0} = r(U(T)) &= \sup\{|e^{T\lambda}| / \lambda \in \sigma_p(G-A)\} \\ &= e^{T \cdot \sup\{\operatorname{re} \lambda / \lambda \in \sigma_p(G-A)\}} \quad , \end{aligned}$$

woraus wir schließlich auch

$$\omega_0 = \sup_{\lambda \in \sigma_p(G-A)} \operatorname{re} \lambda$$

folgern können. Ist nun außerdem X ein OBR und $U(t) \in \mathcal{L}^+(X)$ für

alle $t \geq 0$, so sind für endliches ω_0 auch die Elemente der Halbgruppe

$$V(t) := e^{-\omega_0 t} U(t), \quad t \geq 0,$$

positiv, und wegen

$$r(V(t)) = e^{-\omega_0 t} \frac{1}{e} \sup \{ \operatorname{re} \lambda / \lambda \in \sigma_p(G-A) \} = 1$$

erhalten wir nach dem Satz von Krein-Rutman (Theorem 0.3) zu jeder Zahl $t > 0$ einen Fixpunkt $x_t \in \mathbb{S}^+$ von $V(t)$. Betrachten wir (vgl. [9, Theorem 6.2]) die Folge $t_j = 2^{-j}$, so folgt aus der Halbgruppengleichung (1.12), daß für $j, k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq j$

$$(1.13.2) \quad V(t_j) x_{t_k} = V(t_k)^{2^{k-j}} x_{t_k} = x_{t_k}$$

folgt. Diese Gleichung liefert für $j = 0$ mit der Kompaktheit von $V(1)$, daß $(x_{t_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ besitzt, die in X gegen einen Punkt $y \in \mathbb{S}^+$ konvergiert. Wir betrachten nun einen beliebigen Index $j \in \mathbb{N}$. Aus (1.13.2) ergibt sich für alle hinreichend großen $k \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$y_k = V(t_j) y_k,$$

aus der für $k \rightarrow \infty$ mit der Stetigkeit von $V(t_j)$ in X folgt, daß y ein Fixpunkt von $V(t_j)$ ist. Aus der Halbgruppengleichung (1.12) erhalten wir daraus wiederum, daß

$$V(kt_j) y = V(t_j)^k y = y \quad \forall j, k \in \mathbb{N}$$

gilt. Da $\{kt_j / k, j \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\mathbb{R}_+$ ist, liefert die starke Stetigkeit von V die Gleichung

$$V(t)y = y \quad \forall t \geq 0,$$

die durch Differentiation nach t auf

$$(G - A - \omega_0) y = 0$$

führt.

□

1.14 Bemerkungen:

- (i) Dadurch, daß wir mit Lemma 1.3, Korollar 1.4, Lemma 1.5 und Satz 1.6 einige Lücken in den Ergebnissen von P. E. Sobolevskii [54] geschlossen haben, können wir u.a. manche Resultate aus [9] und [10] vereinfachen und verschärfen. Wir werden im folgenden Paragraphen näher darauf eingehen.
- (ii) Die Darstellungformel (1.10) hat die gleiche Struktur wie die in [27, Theorem 13.4.1] für t -unabhängige Operatoren A und G bewiesene Formel (13.4.8).
- (iii) Die in Lemma 1.13 (iii) bewiesenen Abschätzungen sind als eine Interpolation zwischen den Ungleichungen in Lemma 1.11 und einer zu (1.1) analogen Ungleichung für $U_{\overline{G}}$ zu betrachten. Sie stellen eine erhebliche Verallgemeinerung einer von H. Amann in [8, Lemma 4.2] bewiesenen Abschätzung dar, die sich für $\alpha = 0 = \beta$, $G = 0$ und t -unabhängigen Operator A mit kompakter Resolvente sofort aus Lemma 1.13 (iii) und (iv) ergibt. Für *beschränkte* Operatoren A findet man für den stationären, periodischen und den allgemeinen instationären Fall entsprechende Resultate in [20, Chap. I, Theorem 4.1, Chap. IV, Theorem 1.1, Chap. III, Theorem 4.1] .

§ 2. Einige Resultate über nichtlineare Störungen

Zusätzlich zu (H1) setzen wir nun die folgende "nichtlineare Variante" von (H2') voraus

$$(H2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (H2.1) \text{ Es sei } \alpha_0 \in [0,1] \text{ und } Y \text{ ein BR mit} \\ \quad X_{\alpha_0} \hookrightarrow Y \hookrightarrow X. \\ (H2.2) \text{ Für eine nichtleere Teilmenge } \mathbb{M} \text{ von} \\ \quad X \text{ und eine nichtleere Teilmenge eines} \\ \quad \text{BR } Z \text{ sei} \\ \quad f \in C([0,T] \times (\mathbb{M} \cap Y) \times Z, X) \end{array} \right.$$

Man beachte, daß aus (H2') die Bedingung (H2) für $f(t,x,\lambda) = G(t,\lambda)x$ folgt.

Wir wollen in diesem Paragraphen für $\lambda \in \Lambda$ die semilineare Evolutionsgleichung

$$(E\lambda) \quad \dot{u}(t) + A(t)u(t) = f(t, u(t), \lambda), \quad t > 0,$$

untersuchen, die für $x \in Y$ zusammen mit der Anfangsbedingung

$$u(0) = x$$

ein nichtlineares Cauchyproblem, im folgenden kurz mit $CP(x,\lambda)$ bezeichnet, darstellt.

2.1 Definition:

Es gelte (H1) und (H2), und es sei Y_0 ein stetig zwischen X_1 und Y eingebetteter BR. Falls nicht ausdrücklich anders vereinbart, denken wir uns

$$\mathbb{M}_{Y_0} := \mathbb{M} \cap Y_0$$

stets mit der durch Y_0 induzierten Topologie versehen und definieren für $I = [0, T')$ oder $I = [0, T']$ mit $T' \in (0, T]$ den für

$u \in L_1(I, \mathbb{M}_{Y_0})$ und $\lambda \in \Lambda$ durch

$$F(u, \lambda)(t) := f(t, u(t), \lambda) \quad \forall t \in I$$

definierten zu f gehörigen *Nemytskii-Operator* F , den wir meistens als Abbildung von $C(I, \mathbb{M}_{Y_0}) \times \Lambda$ nach $C(I, X)$ auffassen, aber auch auf anderen Funktionenräumen und für verschiedene Intervalle I der Einfachheit halber mit dem gleichen Symbol F bezeichnen (vgl. Bem. vor Lemma 1.5).

Falls für $(x, \lambda) \in \mathbb{M}_{Y_0} \times \Lambda$

$$(i) \quad u \in C^1(I \setminus \{0\}, X) \cap C(I, \mathbb{M}_{Y_0})$$

eine Abbildung mit

$$u(t) \in X_1 \quad \forall t \in I \setminus \{0\}$$

ist, die für $t \in I \setminus \{0\}$ der Gleichung $(E\lambda)$ genügt,

so heißt u (lokale) *starke* Y_0 -Lösung von $(E\lambda)$ auf I .

$$(ii) \quad u \in C(I, \mathbb{M}_{Y_0}) \text{ punktweise in } I \text{ der Fixpunktgleichung}$$

$$(2.2.1) \quad u = H_0(u(0)) + K_0 F(u, \lambda)$$

genügt, so nennen wir u eine (lokale) *milde* Y_0 -Lösung von $(E\lambda)$ auf I .

$$(iii) \quad u \text{ eine starke (bzw. milde) } Y_0\text{-Lösung von } (E\lambda) \text{ auf } I \\ \text{mit } u(0) = x \text{ ist, so heißt } u \text{ (lokale) starke (bzw.} \\ \text{milde) } Y_0\text{-Lösung von } CP(x, \lambda) \text{ auf } I.$$

$$(iv) \quad \text{In (i)-(iii) heißt das Intervall } I \text{ Existenz- (oder De-} \\ \text{finitions-) Intervall der Lösung } u. \text{ Falls } I = [0, T] \\ \text{ist, so bezeichnen wir } u \text{ als globale Lösung.}$$

Wir beweisen zunächst zwei Lemmata über die Regularität milder Y -Lösungen und ihren Zusammenhang mit starken Y -Lösungen.

2.2 Lemma:

Unter den Voraussetzungen (H1) und (H2) sei I wie in Definition 2.1 und u für $(x, \lambda) \in M_Y \times \Lambda$ eine milde Y -Lösung von $CP(x, \lambda)$ auf I .

Dann gilt

$$(i) \quad u \in C^{1-\alpha}(I \setminus \{0\}, X_\alpha(z)) \quad \forall \alpha \in (0, 1) \quad , \quad \forall z \in [0, T]$$

(ii) Falls $x \in X_\alpha$ für ein $\alpha \in [\alpha_0, 1)$ ist, so ist u eine milde X_α -Lösung von $CP(x, \lambda)$ auf I .

Beweis:

(i) Da stets

$$F(u, \lambda) \in C(I, X)$$

gilt, ist für $\alpha \in (0, 1)$ und $z \in [0, T]$ nach

Lemma 1.5 (i)(a)

$$(2.2.1) \quad K_0 F(u, \lambda) \in C^{1-\alpha}(I, X_\alpha(z)) \quad ,$$

so daß wegen

$$H_0 x \in C^{1-\alpha}([0, T], X_\alpha(z))$$

(vgl. Lemma 1.3 (ii)) in jedem Fall

$$(2.2.2) \quad u \in C^{1-\alpha}(I \setminus \{0\}, X_\alpha(z))$$

folgt.

(ii) ergibt sich unmittelbar aus (2.2.1) und Korollar 1.4 (i). □

Im folgenden Lemma wollen wir zeigen, daß bei nichtlinearen Gleichungen im wesentlichen die gleiche Beziehung zwischen starken und milden Lösungen besteht wie bei linearen Gleichungen. Wir benötigen dazu die nachstehende Regularitätsvoraussetzung an f :

Zu jeder positiven Zahl ρ und jedem Parameter $\lambda \in \Lambda$ gibt es einen Exponenten $v \in (0,1)$ derart, daß

(R)
$$\sup_{\substack{(t_1, x_1) \in [\tau, T] \times (\mathbb{M} \cap \rho \overline{B}_Y) \\ t_1 \neq t_2 \vee x_1 \neq x_2}} \frac{\|f(t_1, x_1, \lambda) - f(t_2, x_2, \lambda)\|}{|t_1 - t_2|^v + \|x_1 - x_2\|_Y^v} < \infty$$

$\forall \tau \in (0, T)$

gilt.

2.3 Lemma:

Unter den Voraussetzungen von Definition 2.1 ist für

$(x, \lambda) \in \mathbb{M}_{Y_0} \times \Lambda$ jede starke Y_0 -Lösung auf I auch eine milde Y_0 -Lösung auf I . Falls (R) erfüllt ist, gilt auch das umgekehrte.

Beweis:

Wir betrachten einen beliebigen Punkt $(x, \lambda) \in \mathbb{M}_{Y_0} \times \Lambda$.

Ist u eine starke Y_0 -Lösung von $CP(x, \lambda)$ auf I , so ist

$F(u, \lambda) \in C(I, X)$, und aus den Vorbemerkungen zu Lemma 1.5 ergibt sich

$$u = H_0 x + K_0 F(u, \lambda)$$

auf I .

Falls u umgekehrt auf I eine milde Y_0 -Lösung von $CP(x, \lambda)$ und die Bedingung (R) erfüllt ist, so folgt für $\alpha \in (\alpha_0, 1)$ mit Lemma 2.2 (i)

wegen $X_\alpha \hookrightarrow Y$, daß

$$u \in C^{1-\alpha}(I \setminus \{0\}, Y)$$

und somit

$$F(u, \lambda) \in C^{v(1-\alpha)}(I \setminus \{0\}, X) \cap C(I, X)$$

mit geeignetem $v \in (0,1)$ gemäß (R) ist. Nach Satz 1.6 ist u eine starke Y_0 -Lösung von $CP(x, \lambda)$ auf I .

□

Mit Hilfe von Lemma 1.3 (iii) zeigt man leicht, daß die Bedingung (R) überflüssig ist, wenn $Y_0 = X_1$ ist.

Wir wollen nun eine sehr nützliche Verallgemeinerung des Gronwall'schen Lemmas angeben.

2.4 Lemma:

Es seien $c > 0$ und $\alpha \in [0,1)$ vorgegeben.

Falls für $t_0 \in (0,T]$ die Funktionen $g, h \in L_1(0, t_0)$ den Ungleichungen

$$g \geq 0 \quad \text{f.Ü. in } (0, t_0)$$

und

$$h(t) \leq g(t) + c \int_0^t (t-s)^{-\alpha} h(s) ds \quad \text{f.f.a. } t \in (0, t_0)$$

genügen, so gibt es eine Konstante $\eta(\alpha, c, T) > 0$, die unabhängig von

t_0 , g und h ist, mit

$$h(t) \leq g(t) + \eta \int_0^t (t-s)^{-\alpha} g(s) ds \quad \text{f.f.a. } t \in (0, t_0) \quad .$$

Beweis:

folgt sofort aus [10, Lemma 2.3].

□

In der vorliegenden Arbeit wird sich dieses Lemma beim Beweis sämtlicher Aussagen, in denen es darum geht, milde Lösungen von $CP(x, \lambda)$ durch die vorgegebenen Daten x und λ abzuschätzen - man denke etwa an a priori-Abschätzungen, Wachstums- und Stabilitätsaussagen - als ein überaus wirkungsvolles Hilfsmittel erweisen. Es liefert aber auch genau wie das klassische Gronwall-Lemma unter der Lipschitzbedingung

Jeder Punkt $\mu \in \Lambda$ besitze zu jeder Zahl $\rho > 0$
eine (von μ und ρ abhängige) Λ -Umgebung U mit

$$(L) \quad \sup_{\substack{(t,\lambda) \in [0,T] \times U \\ x_1 \in \mathbb{M} \cap \rho B_Y, x_1 \neq x_2}} \frac{\|f(t, x_1, \lambda) - f(t, x_2, \lambda)\|}{\|x_1 - x_2\|_Y} < \infty$$

einen fast trivialen Beweis der folgenden Eindeutigkeitsaussage.

2.5 Lemma:

Unter den Voraussetzungen (H1), (H2) und (L) gibt es für
 $(x, \lambda) \in \mathbb{M}_Y \times \Lambda$ und $T' \in (0, T]$ höchstens eine milde Y -Lösung
von $CP(x, \lambda)$ auf $[0, T']$.

Beweis:

[10, Lemma 3.1].

□

Da wir in § 3. für den Beweis der stetigen Abhängigkeit milder Lösungen vom Parameter λ benötigen, daß die Lipschitzkonstanten lokal gleichmäßig bezüglich λ gewählt werden können, haben wir dies in (L) vorausgesetzt, obwohl es für den Beweis von Lemma 2.5 wie auch des nächsten Theorems völlig unerheblich ist. Man beachte, daß (L) unter der Voraussetzung (H2') für $f(t, x, \lambda) = G(t, \lambda)x$ erfüllt ist.

2.6 Definition:

Es gelte (H1) und (H2). Für $(x, \lambda) \in \mathbb{M}_Y \times \Lambda$ seien u_1 und u_2
(milde oder starke) Y -Lösungen von $CP(x, \lambda)$ mit Definitionsintervallen I_1 bzw. I_2 .

- (i) u_2 heißt *Fortsetzung* (bzw. *echte Fortsetzung*) von u_1 ,
falls

$$I_1 \subset I_2 \quad (\text{bzw. } I_1 \subsetneq I_2)$$

und

$$u_2|_{I_1} = u_1 \quad .$$

- (ii) u_2 heißt *maximale Fortsetzung* von u_1 , falls u_2 Fortsetzung von u_1 ist und selbst keine echte Fortsetzung besitzt. In diesem Fall heißt I_2 das zu u_2 gehörige *maximale Existenzintervall*.

Mit Hilfe des Zorn'schen Lemmas zeigt man sofort, daß jede lokale (milde oder starke) Y-Lösung von $CP(x, \lambda)$ eine (i.a. nicht eindeutig bestimmte) maximale Fortsetzung besitzt, die unter der Voraussetzung (L) eindeutig ist.

Zur Formulierung eines allgemeinen Existenz- und Eindeigkeitssatzes für lokale milde Y-Lösungen von $CP(x, \lambda)$ benötigen wir die folgenden Voraussetzungen

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Für alle } \lambda \in \Lambda \text{ und } \rho > 0 \text{ sei} \\ \sup_{(t,x) \in [0,T] \times (M \cap \rho \overline{B}_Y)} \|f(t,x,\lambda)\| < \infty \end{array} \right.$$

und

$$(H3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (H3.1) & M \text{ ist abgeschlossen in } X \\ (H3.2) & U(t, \tau) M \subset M \quad \forall \quad 0 \leq \tau \leq t \leq T \\ (H3.3) & \text{Für } (t,x,\lambda) \in [0,T] \times M_{X_{\alpha_0}} \times \Lambda \\ & \text{sei} \\ & \liminf_{h \rightarrow 0+} \frac{d_X(x+h f(t,x,\lambda), M)}{h} = 0 \quad . \end{array} \right.$$

Wir fassen (H1), (H2) und (H3) zur Voraussetzung (H) zusammen und definieren zur weiteren Abkürzung

$$\mathbb{M}_\alpha := \mathbb{M}_{X_\alpha} \quad \forall \alpha \in [0,1] \quad .$$

Es braucht wohl kaum darauf hingewiesen zu werden, daß die Bedingung (H3) im Falle $\mathbb{M} = X$ unter den Voraussetzungen (H1) und (H2) stets trivialerweise erfüllt ist.

2.7 Theorem:

Falls unter der Voraussetzung (H) die Bedingungen (B) und (K) erfüllt sind oder (L) gilt, so gibt es zu jedem "Datenpaar" $(x, \lambda) \in \mathbb{M}_{\alpha_0} \times \Lambda$ eine Zahl

$$T' = T'(\|x\|_{X_{\alpha_0}}, \lambda) \in (0, T]$$

derart, daß $CP(x, \lambda)$ mindestens eine (falls (L) gilt, sogar genau eine) milde X_{α_0} -Lösung u auf $[0, T']$ besitzt.

Ist $\bar{u}$ eine maximale Fortsetzung von u mit maximalem Existenzintervall I , so gilt entweder

$$(a) \quad I = [0, T]$$

oder

$$(b) \quad I = [0, T^*) \text{ mit } T^* \in (0, T] \text{ und}$$

$$\limsup_{t \rightarrow T^*-} \|\bar{u}(t)\|_Y = \infty \quad .$$

Beweis:

Da ein vollständiger Beweis dieses Satzes den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen würde, müssen wir uns mit einigen Bemerkungen begnügen.

Der Beweis der lokalen Existenzaussage dieses Satzes beruht auf einer Variante eines klassischen Polygonzugverfahrens, das wohl zum ersten Mal von R. H. Martin in [42, Lemma 4] für Differentialgleichungen in Banachräumen benutzt wurde und später mit einigen Modifikationen von

verschiedenen Autoren erfolgreich zum Beweis ähnlicher Existenzsätze für Cauchyprobleme in abgeschlossenen Mengen eines Banachraumes angewandt wurde (vgl. z.B. [59], [21], [9], [58]).

Modifiziert man sämtliche in [9, §§ 3,4] geführten Beweise, indem man konsequent anstelle der in [9, Lemma 2.4] aufgeführten Abschätzungen für den Evolutionsoperator U unser Lemma 1.3 benutzt, so erhält man für $(x, \lambda) \in \mathbb{M}_{\alpha_0} \times \Lambda$ unter den Voraussetzungen (B) und (K) wie in [9, Theorem 4.1] eine lokale milde X_{α_0} -Lösung u , deren Existenz man unter der Voraussetzung (L) mit ähnlichen Überlegungen wie in [41, Chap. 8, Theorem 2.1 (a)] beweist.

Ist $\bar{u}$ eine maximale Fortsetzung von u mit (max.) Existenzintervall I , so führen wir die Annahme, weder (a) noch (b) sei richtig, leicht zum Widerspruch.

Setzen wir nämlich unter dieser Annahme $T' := \sup I$, so ist entweder

$$I = [0, T'] \quad , \quad 0 < T' < T \quad ,$$

oder es gilt

$$\limsup_{t \rightarrow T'^-} \|\bar{u}(t)\|_Y < \infty \quad .$$

Da in beiden Fällen

$$F(\bar{u}, \lambda) \in L_{\infty}((0, T'), X)$$

folgt, schließen wir aus Lemma 1.5 (i)(a), daß für jedes $\alpha \in (0, 1)$

$$K_0 F(\bar{u}, \lambda) \in C^{1-\alpha}([0, T'], X_{\alpha}(T'))$$

gilt. Nach Lemma 1.3 (ii) haben wir ferner

$$H_0 x \in C^{1-\alpha}((0, T'], X_{\alpha}(T')) \quad ,$$

so daß insgesamt

$$\bar{u} \in C^{1-\alpha}((0, T'], X_{\alpha}(T')) \quad \forall \alpha \in (0, 1)$$

folgt. Benutzen wir diese Aussage für $\alpha \in (\alpha_0, 1)$, so erhalten wir wegen der Einbettung $X_{\alpha}(T') \hookrightarrow X_{\alpha_0}$ zunächst, daß $I = [0, T']$ ist mit $0 < T' < T$. Außerdem garantiert diese Einbettung, daß die Vor-

aussetzungen unseres Satzes erfüllt bleiben, wenn wir A und f durch

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{A}(t) := A(t + T') \\ \text{bzw.} \\ \tilde{f}(t, x, \lambda) := f(t + T', x, \lambda) \quad \forall (x, \lambda) \in \mathbb{M}_Y \times \Lambda \end{array} \right\} \forall 0 \leq t \leq T - T'$$

ersetzen, da $\tilde{X}_\alpha := D(\tilde{A}_\omega^\alpha(0)) = X_\alpha(T') \hookrightarrow Y$ gilt, so daß uns seine lokale Existenzaussage eine Zahl

$$T'' = T''(\|\tilde{u}(T')\|_{X_\alpha(T')}, \lambda) \in (0, T - T']$$

und eine milde $X_\alpha(T')$ -Lösung v von

$$v + \tilde{A}(t)v = \tilde{f}(t, v, \lambda), \quad t > 0$$

$$v(0) = \tilde{u}(T')$$

auf $[0, T'']$ liefert. Bezeichnen wir mit $\tilde{U}(t, \tau)$ den Evolutionsoperator zu

$$w + \tilde{A}(t)w = 0, \quad \tau < t \leq T - T'$$

$$w(\tau) = x$$

und setzen wir

$$\hat{U}(t) := \begin{cases} \tilde{u}(t) & t \in [0, T'] \\ v(t - T') & t \in [T', T' + T''] \end{cases},$$

so ist $\hat{U} \in C([0, T' + T''], X_{\alpha_0})$ wegen

$$\tilde{U}(t, \tau) = U(t + T', \tau + T') \quad \forall 0 \leq \tau \leq t \leq T - T'$$

eine echte Fortsetzung der milden X_{α_0} -Lösung $\tilde{u}$ von $CP(x, \lambda)$, im

Widerspruch zur Maximalität von $\tilde{u}$. Somit gilt entweder (a) oder (b). $\square$

Berücksichtigt man Lemma 2.2 (ii), so liefert dieser Satz für

$\alpha \in [\alpha_0, 1)$ offenbar zu jedem Punkt $(x, \lambda) \in \mathbb{M}_\alpha \times \Lambda$, zu dem jede

zugehörige lokale milde X_α -Lösung von $CP(x, \lambda)$ ein in Y beschränktes

Bild besitzt, eine globale milde X_α -Lösung. Diese Bedingung ist trivialerweise für jeden Punkt

$(x, \lambda) \in M_\alpha \times \Lambda$ erfüllt, falls M_Y beschränkt ist (in Y). Im Falle $Y = X$ kann dies durchaus eine vernünftige Voraussetzung sein, die jedoch umso einschränkender wird, je feiner die Topologie von Y ist. Wir werden uns daher später noch um weniger triviale hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit solcher a priori Abschätzungen bemühen (vgl. Lemma 3.3).

Zunächst jedoch soll die *Flußinvarianz-Bedingung* (H3.3) eingehender studiert und (hoffentlich) ein wenig transparenter gemacht werden.

Zu diesem Zweck setzen wir $\rho := d(\cdot, M)$ und $y = f(t, x, \lambda)$, so daß wir (H3.3) in der Form

$$(2.1) \quad \liminf_{h \rightarrow 0+} \frac{\rho(x+hy) - \rho(x)}{h} = 0$$

schreiben können. Definieren wir nun

$$g(x') := \inf_{w \in M} \langle x', x-w \rangle \quad \forall x' \in X',$$

so gilt für alle $x' \in \overline{B}_{X'}$ und $h \in \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \rho(x+hy) &= \inf_{w \in M} \sup_{y' \in \overline{B}_{X'}} \langle y', x+hy-w \rangle \\ &\geq g(x') + h \langle x', y \rangle. \end{aligned}$$

Für die folgenden Überlegungen ist es unerheblich, daß $\rho(x)$ verschwindet. Wir werden dies daher unberücksichtigt lassen. Da g w^* -oberhalbstetig ist, ist $g^{-1}([\rho(x), \infty)) \subset (x-M)^*$ w^* -abgeschlossen, und aus dem Satz von Alaoglu folgt, daß

$$\tilde{\partial}\rho(x) := \overline{B}_{X'} \cap g^{-1}(\{\rho(x)\}) = \overline{B}_{X'} \cap g^{-1}([\rho(x), \infty))$$

w^* -kompakt ist. Somit nimmt die w^* -stetige Funktion $\langle \cdot, y \rangle$ auf $\tilde{\partial}\rho(x)$ Minimum und Maximum an, falls $\tilde{\partial}\rho(x)$ nichtleer ist, und aus unserer obigen Abschätzung folgt für $h > 0$ die Ungleichung

$$(2.2) \quad \frac{\rho(x-hy)-\rho(x)}{-h} \leq \min_{x' \in \partial \rho(x)} \langle x', y \rangle \leq \max_{x' \in \tilde{\partial} \rho(x)} \langle x', y \rangle \leq \frac{\rho(x+hy)-\rho(x)}{h}.$$

Die Bedingung (2.1) impliziert also insbesondere, daß

$$(2.3) \quad \langle x', y \rangle \leq 0 \quad \forall x' \in \tilde{\partial} \rho(x)$$

gilt. Die Beobachtung, daß für konvexe Mengen M die Bedingungen (2.1) und (2.3) sogar äquivalent sind, ist überraschenderweise noch ziemlich neu (vgl. [21, Lemma 4.1]) und wurde wohl zum ersten Mal von R. M. Redheffer und W. Walter in [51, § 4] für den Spezialfall eines abgeschlossenen Keiles bewiesen.

Wenn wir zeigen können, daß $\tilde{\partial} \rho(x)$ gleich dem Subdifferential

$$\partial \rho(x) := \{x' \in X' \mid \langle x', z-x \rangle \leq \rho(z)-\rho(x) \quad \forall z \in X\}$$

von ρ an der Stelle x ist, das für konvexe stetige Funktionale niemals leer ist¹⁾, so ergibt sich diese Beobachtung ganz einfach aus der Tatsache, daß im konvexen Fall die rechtsseitigen Gateaux-Ableitungen

$$D^+ \rho(x; y) := \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\rho(x+hy)-\rho(x)}{h}$$

stets existieren (die Differenzenquotienten sind monoton wachsend in h) und sich durch die Formel

$$(2.4) \quad D^+ \rho(x; y) = \max_{x' \in \partial \rho(x)} \langle x', y \rangle$$

berechnen lassen (vgl. [28, §§ 7, 8, 10 b]). Zum Nachweis der Inklusion $\partial \rho(x) \subset \tilde{\partial} \rho(x)$ beachten wir zunächst, daß jedes $x' \in \partial \rho(x)$ der Abschätzung

$$\pm \langle x', z \rangle = \langle x', x \pm z - x \rangle \leq \rho(x \pm z) - \rho(x) \leq \|z\| \quad \forall z \in X$$

genügt. Außerdem gilt für $w \in M$ wegen $\rho(w) = 0$ die Ungleichung

1) dies zeigt man, indem man den Trennungssatz von Hahn-Banach auf die konvexen Teilmengen $\{(z, t) \in X \times \mathbb{R} \mid t' > \rho(z)\}$ und $\{(x, \rho(x))\}$ von $X \times \mathbb{R}$ anwendet.

$$\rho(x) \leq \langle x', x-w \rangle \leq \|x-w\|, \quad ,$$

aus der wir

$$\rho(x) \leq \inf_{w \in M} \langle x', x-w \rangle \leq \rho(x)$$

und somit $x' \in \tilde{\partial}\rho(x)$ schließen.

Die umgekehrte Inklusion ist erfüllt, da jedes $x' \in \tilde{\partial}\rho(x)$ für $z \in X$ und $w \in M$ der Ungleichung

$$\langle x', z-x \rangle = \langle x', z-w \rangle - \langle x', x-w \rangle \leq \|z-w\| - \rho(x)$$

genügt, die uns durch Übergang zum Infimum über $w \in M$ auf der rechten Seite garantiert, daß $x' \in \partial\rho(x)$ ist.

Wir fassen unsere Überlegungen im folgenden Lemma zusammen, wobei wir die Gleichung $g^{-1}(\{0\}) = (x-M)^*$ beachten.

2.8 Lemma:

Die Voraussetzung (H3.3) hat stets die Tangentialbedingung

$$(2.8.1) \quad \sup_{x' \in (x-M)^*} \langle x', f(t, x, \lambda) \rangle \leq 0 \quad \forall (t, x, \lambda) \in [0, T] \times M_{\alpha_0} \times \Lambda$$

zur Folge. Für konvexes M sind beide Bedingungen äquivalent.

Falls (X, P) ein OBR ist, so kann im Fall $M = P$ die Bedingung (H3.2) in der Form

$$(P1) \quad U(t, \tau) \in \mathcal{L}^+(X) \quad \forall 0 \leq \tau \leq t \leq T$$

geschrieben werden, während sich (H3.3) nach Lemma 2.8 und Lemma 0.1 (ii) durch

$$(P2) \quad \langle x', f(t, x, \lambda) \rangle \geq 0 \quad \forall (t, x, \lambda) \in [0, T] \times P_{\alpha_0} \times \Lambda, \forall x' \in P^* \cap \{x\}^\circ$$

ausdrücken läßt (d.h. $f(t, \cdot, \lambda)$ quasipositiv $\forall (t, \lambda) \in [0, T] \times \Lambda$).

Ist (X, P) ein OBR und W ein mittels der Injektion $j : W \rightarrow X$ stetig in X eingebetteter BR, so sei W im folgenden stets mit der durch den Kegel $j^{-1}(P)$ induzierten Ordnung versehen. Insbesondere sind für $\alpha > 0$ die Räume X_α mit den Kegeln $P_\alpha (= P \cap X_\alpha)$ geordnete Banachräume.

Das folgende Lemma ist als ein Nachtrag zu § 1. anzusehen.

2.9 Lemma:

Sei (X, P) ein OBR, und es gelte $(H1)$ und $(H2')$. Dann sind für $\lambda \in \Lambda$ die folgenden Aussagen erfüllt:

- (i) Falls unter der Voraussetzung $(P1)$ für alle $(t, x) \in [0, T] \times P_{\alpha_0}$ und $x' \in P^* \cap \{x\}^0$

$$\langle x', G(t, \lambda)x \rangle \geq 0$$

gilt, so ist $U_{\overline{G}(\lambda)}(t, \tau) \in \mathcal{L}^+(X)$ für $0 \leq \tau \leq t \leq T$.

- (ii) Falls die Operatoren $U_{\overline{G}(\lambda)}(T, \tau)$, $0 \leq \tau \leq T$, positiv (bzw. strikt positiv) in X sind, so ist für alle $\alpha \in [0, 1]$ die Abbildung

$$(g \rightarrow K_0^{\overline{G}(\lambda)} g(T)) \in \mathcal{L}(C([0, T], X), X_\alpha)$$

positiv (bzw. strikt positiv). Gibt es ein $\alpha \in [0, 1]$, so

daß P_α innere Punkte (in X_α) besitzt und $U_{\overline{G}(\lambda)}(T, \tau)$ für $0 \leq \tau < T$ stark positiv von X nach X_α ist, so ist die obige Abbildung stark positiv.

Beweis:

- (i) Wählen wir $\tau \in [0, T]$ und $\alpha \in (\alpha_0, 1)$, so ist die durch

$$u(t) := U_{\overline{G}(\lambda)}(t+\tau, \tau)x \quad t \in [0, T-\tau]$$

definierte Abbildung nach Korollar 1.10 für $(x, \lambda) \in P_{X_\alpha(\tau)} \times \Lambda$ eine milde $X_\alpha(\tau)$ -Lösung des linearen Anfangswertproblems

$$u(t) + A(t+\tau)u(t) = G(t+\tau, \lambda)u(t), \quad t \in (0, T-\tau]$$

$$u(0) = x,$$

das gemäß Theorem 2.7 genau eine globale *nichtnegative* milde

$X_\alpha(\tau)$ -Lösung u besitzt, denn wie im Beweis von Theorem 2.7

bleiben auch nach der Translation wegen $X_\alpha(\tau) \hookrightarrow Y$ die Voraussetzungen (H) und (L) erfüllt, und aus Lemma 1.11 folgt, daß das Bild von u in Y beschränkt ist.

Somit sind für einen beliebigen Punkt $x \in P$ die Abbildungen

$$u_\epsilon := H_\tau^{\overline{G}(\lambda)} U(\tau+\epsilon, \tau)x$$

für $\epsilon \in (0, T-\tau)$ nichtnegativ in $C([\tau, T], X_\alpha(\tau))$. Da sie gemäß Lemma 1.11 und Lemma 1.3 (iii) in $C([\tau, T], X)$ für $\epsilon \rightarrow 0+$ gegen u konvergieren, ist auch u nichtnegativ.

- (ii) Da P abgeschlossen und konvex ist, folgt für $g \in C_+([0, T], X) \setminus \{0\}$ aus der Positivität der Evolutionsoperatoren mit (1.13) nach [41, Chap. 2, Lemma 1.3], daß

$$\frac{1}{T} K_0^{\overline{G}(\lambda)} g(T) \in P$$

gilt, womit die Positivität der betrachteten Abbildung bereits gezeigt ist. Wir setzen nun voraus, die Evolutionsoperatoren seien für $\tau < T$ strikt positiv (bzw. stark positiv). Nach Lemma 1.11 ist

$$h := U_{\overline{G}(\lambda)}(T, \cdot)g(\cdot) \in L_1((0, T), X_\alpha),$$

und wegen (1.12) gilt für $0 \leq \tau \leq t < T$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|h(t) - h(\tau)\|_{X_\alpha} \\ & \leq \|A_\omega^\alpha(0) U_{\overline{G}(\lambda)}(T, t)\| (\|g(t) - g(\tau)\| + \|(Id - U_{\overline{G}(\lambda)})(t, \tau))g(\tau)\|), \end{aligned}$$

aus der nach Lemma 1.11 und Korollar 1.10 die rechtsseitige Stetigkeit von h als Abbildung von $[0, T]$ nach X_α folgt.

Für einen Punkt $t_0 \in [0, T]$, in dem g nicht verschwindet, ist

$$h(t_0) \in \dot{P}_\alpha \quad (\text{bzw. } h(t_0) \in \overset{\circ}{P}_\alpha),$$

und nach Lemma 0.2 gibt es ein Funktional $x' \in (P_\alpha)^* \setminus \{0\}$ derart (bzw. gilt für jedes solche x'), daß die nichtnegative rechtsseitig stetige reelle Funktion $x' \circ h$ in t_0 positiv ist, so daß wir in der dualen Paarung von $(X_\alpha)'$ und X_α wegen der Integrierbarkeit von h als Abbildung von $[0, T]$ nach X_α

$$\langle x', \int_0^T h(s) ds \rangle = \int_0^T (x' \circ h)(s) ds > 0$$

erhalten, woraus mit Lemma 0.2

$$\int_0^T h(s) ds \in \dot{P}_\alpha \quad (\text{bzw. } \overset{\circ}{P}_\alpha)$$

folgt.

□

2.10 Bemerkungen:

- (i) Wegen Lemma 2.3 ist es vernünftig, von nun ab nur noch milde Lösungen zu untersuchen.
- (ii) Die bis heute erfolgreichsten Methoden zum Nachweis von Lösungen nichtlinearer Cauchy-Probleme in endlich- und unendlichdimensionalen Räumen kann man grob in drei Klassen unterteilen: Dies sind erstens Anwendungen des konstruktiven Picard-Banach'schen Kontraktionsprinzips, die unter einer Lipschitzbedingung an die Nichtlinearität möglich sind (vgl. [21], [30], [41], [32], [49]) , zweitens Anwendungen der Theorie der monotonen und accretiven Operatoren, bei denen man mit Dissipativitäts- und Halbbeschränktheitsvoraussetzungen (in gewissem Sinne "einseitige" Lipschitzbedingungen) auskommt (vgl. [15], [18] , [21] , [59]) und drittens Abbildungsgradmethoden, insbesondere Anwendungen des Schauder'schen Fixpunktsatzes, für die man Kompaktheitsvoraussetzungen benötigt (siehe etwa [21] , [41] , [9] , [32] , [47]) und die man als eine Übertragung des Peano'schen Existenzsatzes auf unendlichdimensionale Räume ansehen muß, da man seit J. Dieudonné's Gegenbeispiel [23] weiß, daß in unendlichdimensionalen Räumen die Stetigkeit der Nichtlinearität allein i.a. nicht für die Existenz von Lösungen ausreicht. Die Bedingungen (L) bzw. (K) und (B) entsprechen genau der ersten bzw. der letzten dieser drei Methoden, obwohl in den zum Teil in der Beweisskizze zu Theorem 2.7 erwähnten Arbeiten [42] , [59] , [9] und [40] keine Fixpunktsätze benutzt werden, da M abgeschlossen ist. Hätten wir M als offen vorausgesetzt, so könnte man Theorem 2.7 sehr einfach mit Hilfe der Fixpunktsätze von Banach und Schauder beweisen und die Bedingung (H3) wäre natürlich überflüssig (vgl. z.B. [26] und [32]).

- (iii) H. Amann übertrug in [9] die Ergebnisse von J. H. Lightbourne III und R. H. Martin aus [37] auf t -abhängige Operatoren A . Er benötigte dabei die etwas unnatürliche Bedingung, daß man für die Existenz einer milden X_{α_0} -Lösung von $CP(x, \lambda)$ Anfangswerte $x \in X_{\alpha}$ mit $\alpha > \alpha_0$ vorgeben muß. Von diesem "Regularitätsverlust" haben wir uns in Theorem 2.7 im wesentlichen mit Hilfe von Lemma 1.3 befreit. Außerdem zeigt unser Beweis der Aussage über das Verhalten maximaler Fortsetzungen am Rande ihres Existenzintervalles, daß es in [9, Theorem 4.1] überflüssig ist, zu beweisen, daß die Länge T' des lokalen Existenzintervalles unabhängig von der Wahl des "Startzeitpunktes" s ist, und daß man für die Existenz einer globalen Lösung von $CP(x, \lambda)$ keine *gemeinsame* a priori-Schranke für alle lokalen Lösungen benötigt, sondern es schon reicht, wenn man zeigen kann, daß jede lokale Lösung beschränkt in Y ist.
- (iv) In [39] bewies R. H. Martin für den Fall, daß M von t abhängt, $f(t, \cdot, \lambda)$ jedoch auf ganz M definiert ist, einen analogen Existenzsatz zu Theorem 2.7. Obwohl es auch unter unseren Voraussetzungen möglich ist, Theorem 2.7 für t -abhängige Mengen zu beweisen, haben wir darauf verzichtet, weil wir dieses Resultat in der vorliegenden Arbeit nicht benötigen.
- (v) Dadurch, daß wir Satz 1.6 ohne Hölderstetigkeit in $t = 0$ beweisen konnten, war es möglich, unter der (im Vergleich zu [9] sogar verallgemeinerten) Regularitätsvoraussetzung (R) die Äquivalenz von starken und milden Lösungen von $CP(x, \lambda)$ zu beweisen.
- (vi) Als hinreichende Bedingung für Flußinvarianz (ohne Existenzuntersuchungen) benutzten viele Autoren Tangentialbedingungen, die unserer Voraussetzung (H3.3) entsprechen. Nachdem in endlichdimensionalen Räumen M. Nagumo das Problem bereits 1942 in [43] behandelte, wurde es unabhängig davon Anfang der 70er Jahre von J. M. Bony [13, Theorem 2.1]

und Brézis [14] wieder aufgegriffen. Während Brézis eine zu (H3.3) analoge Bedingung benutzte, kam Bony mit einer (i.a. schwächeren) zu (2.8.1) analogen Voraussetzung aus. Später wies M. G. Crandall die Äquivalenz dieser beiden Bedingungen für kompakte Mengen nach (vgl. [17, Lemma 1]) und zeigte, daß für stetige, jedoch nicht Lipschitzstetige Abbildungen nicht einmal die Bedingung von Brézis hinreichend für Flußinvarianz, wohl aber für die Existenz einer Lösung ist (vgl. [17, Theorem 1]).

Die Übertragung dieser Resultate auf unendlichdimensionale Räume gelang R. M. Redheffer und W. Walter in [51]. Sie zeigten auch die Äquivalenz von (H3.3) und (2.8.1) für abgeschlossene Keile M . Daß dies - wie wir in Lemma 2.8 gezeigt haben - für beliebige konvexe Mengen M gilt, bewies K. Deimling in [21, Lemma 4.1], ohne Gateaux-Ableitungen konvexer Funktionale zu benutzen.

- (vii) Lemma 2.9 (i) verallgemeinert ein Ergebnis von E. Hille und R. S. Phillips über t -unabhängige Störungen einer Halbgruppe linearer positiver Operatoren (vgl. [27, Theorem 13.4.2 (6)]) bezüglich mehrerer Gesichtspunkte. Man beachte, daß die Voraussetzung über $G(t, \cdot)$ in Lemma 1.9 (i) genau Quasipositivität in X_{a_0} ist.

§ 3. Abhängigkeit der Lösungen von den Daten

Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, wie die in Theorem 2.7 nachgewiesenen milden Lösungen von $CP(x, \lambda)$ auf kleine Änderungen der Daten x und λ "reagieren". Wir werden dabei feststellen, daß einige Eigenschaften der Nichtlinearität (wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit oder monotonen Wachstum) an einem "Lösungsoperator", den wir noch exakt zu definieren haben, vererbt werden. Zu diesem Zweck betrachten wir für ein $\alpha \in [\alpha_0, 1)$ eine nichtleere Teilmenge W von $IM_\alpha \times \Lambda$, die der folgenden Bedingung

$$(AP)_W \left\{ \begin{array}{l} \text{Es gibt eine Zahl } R > 0 \text{ derart, daß für} \\ \text{alle } (x, \lambda) \in W \text{ und jede milde } X_\alpha\text{-Lösung} \\ \text{u von } CP(x, \lambda) \text{ mit Existenzintervall } I \\ \text{a priori} \\ \sup_{t \in I} \|u(t)\|_Y \leq R \\ \text{gilt.} \end{array} \right.$$

genügt. Unter den Voraussetzungen (H), (L) und $(AP)_W$ gibt es nach Theorem 2.7 zu jedem Datenpaar $(x, \lambda) \in W$ eine eindeutig bestimmte globale milde X_{α_0} -Lösung $u =: S(x, \lambda)$ von $CP(x, \lambda)$, die nach Lemma 2.2 (ii) sogar in $C([0, T], X_\alpha)$ liegt. Den so definierten Operator

$$S : W \rightarrow C([0, T], X_\alpha)$$

nennen wir einen *Lösungsoperator* zu unserem nichtlinearen Cauchyproblem, und wir werden ihn der Einfachheit halber für verschiedene λ und W stets mit dem gleichen Symbol S bezeichnen.

3.1 Satz:

Falls die Voraussetzungen (H) und (L) erfüllt sind, so gelten für $\alpha \in [\alpha_0, 1)$ die folgenden Aussagen:

- (i) Ist $(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{M}_\alpha \times \Lambda$ und u_0 eine globale milde X_α -Lösung von $CP(x_0, \lambda_0)$, so gibt es eine $\mathbb{M}_\alpha \times \Lambda$ -Umgebung W von (x_0, λ_0) , für die $(AP)_W$ gilt.
- (ii) Ist W eine beliebige nichtleere Teilmenge von $\mathbb{M}_\alpha \times \Lambda$, für die $(AP)_W$ erfüllt ist, so besitzt S die folgenden Stetigkeitseigenschaften:
- (a) Mit $W_\lambda := \{x \in \mathbb{M}_\alpha / (x, \lambda) \in W\}$ gilt für $\lambda \in \Lambda$ und $\beta \in [0, \alpha]$ ($\sup \emptyset := 0$):
- $$\sup_{\substack{(t, x_1) \in [0, T] \times W_\lambda \\ x_1 \neq x_2}} \frac{t^{\alpha-\beta} \| [S(x_1, \lambda) - S(x_2, \lambda)](t) \|_{X_\alpha}}{\| x_1 - x_2 \|_{X_\beta}} < \infty$$
- (b) $S \in C(W, C([0, T], X_\alpha))$.

Beweis:

- (i) Wir definieren zunächst gemäß Lemma 1.3 (i) für $0 \leq \beta \leq \alpha < 1$ die beiden Konstanten

$$c_1(\alpha, \beta) := \sup_{0 \leq t \leq T} t^{\alpha-\beta} \| A_\omega^\alpha(0) U(t, 0) A_\omega^{-\beta}(0) \|$$

und

$$c_2(\alpha) := \sup_{0 \leq \tau \leq t \leq T} (t-\tau)^\alpha \| A_\omega^\alpha(0) U(t, \tau) \|.$$

Setzen wir

$$\rho := \sup_{0 \leq t \leq T} \| u_0(t) \|_{X_\alpha} + 1,$$

so gibt es wegen (L) und $X_\alpha \hookrightarrow X_{\alpha_0} \hookrightarrow Y$ eine Zahl

$\delta_0(\rho, \lambda_0) > 0$, so daß für $U = \Lambda \cap (\lambda_0 + \delta_0 \overline{B}_Z)$ die Konstante

$$c_3(\alpha) := \sup_{\substack{(t,\tau) \in [0,T] \times U \\ x_1 \in M \cap \partial \overline{B}_{X_\alpha}, x_1 \neq x_2}} \frac{\|f(t, x_1, \lambda) - f(t, x_2, \lambda)\|}{\|x_1 - x_2\|_{X_\alpha}},$$

endlich ist. Definieren wir schließlich mit

$\eta = \eta(\alpha, c_2(\alpha) c_3(\alpha), T)$ aus Lemma 2.4 die Konstante

$$c_4(\alpha) := 1 + \eta \frac{[\Gamma(1-\alpha)]^2 T^{1-\alpha}}{\Gamma(2(1-\alpha))},$$

so können wir zu vorgegebenem $\varepsilon \in (0,1]$ eine Zahl

$$\delta = \delta(\alpha) \in (0, \min\{\delta_0, \frac{\varepsilon}{3c_1(\alpha, \alpha)c_4(\alpha)}\})$$

so klein wählen, daß für alle $\lambda \in \Lambda$ mit $\|\lambda - \lambda_0\|_Z \leq \delta$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \| [F(u_0, \lambda) - F(u_0, \lambda_0)](t) \| \leq \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3c_2(\alpha)c_4(\alpha)T^{1-\alpha}}$$

gilt. Für

$$(x, \lambda) \in W := [M_\alpha \cap (x_0 + \delta \overline{B}_{X_\alpha})] \times [\Lambda \cap (\lambda_0 + \delta \overline{B}_Z)]$$

und jede milde X_α -Lösung u von $CP(x, \lambda)$ mit Existenzintervall I gilt mit

$$t^* := \sup\{t_0 \in I / \sup_{0 \leq s \leq t_0} \| (u - u_0)(s) \|_{X_\alpha} \leq \varepsilon\}$$

für $t \in I \cap [0, t^*]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \| (u - u_0)(t) \|_{X_\alpha} &\leq c_1(\alpha, \beta) t^{\beta-\alpha} \| x - x_0 \|_{X_\beta} \\ &\quad + c_2(\alpha) \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \| [F(u, \lambda) - F(u_0, \lambda_0)](s) \| ds, \end{aligned}$$

wobei der Integrand der Ungleichung

$$\begin{aligned} \| [F(u, \lambda) - F(u_0, \lambda_0)](s) \| &\leq c_3(\alpha) \| (u - u_0)(s) \|_{X_\alpha} \\ &\quad + \| [F(u_0, \lambda) - F(u_0, \lambda_0)](s) \| \end{aligned}$$

genügt. Mit

$$g(t, x, \lambda) := c_1(\alpha, \beta) t^{\beta-\alpha} \|x - x_0\|_{X_\beta} \\ + c_2(\alpha) \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \| [F(u_0, \lambda) - F(u_0, \lambda_0)](s) \| ds$$

erhalten wir also

$$\|(u - u_0)(t)\|_{X_\alpha} \leq g(t, x, \lambda) + c_2 c_3 \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|(u - u_0)(s)\|_{X_\alpha} ds,$$

so daß mit $\eta = \eta(\alpha, c_2 c_3, T)$ gemäß Lemma 2.4

$$\|(u - u_0)(t)\|_{X_\alpha} \leq g(t, x, \lambda) + \eta \int_0^t (t-s)^{-\alpha} g(s, x, \lambda) ds$$

folgt. Benutzt man nun Lemma 1.8, wobei man in dem auftretenden Doppelintegral die Integrationsreihenfolge vertauscht und ferner beachtet, daß Lemma 1.8 die Ungleichung

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha+\beta)}{\Gamma(2(1-\alpha)+\beta)} = \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^{-\alpha} s^\beta ds \leq \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^{-\alpha} ds \\ = \frac{[\Gamma(1-\alpha)]^2}{\Gamma(2(1-\alpha))}$$

impliziert, so gelangt man zu der Abschätzung

$$(3.1.1) \quad \begin{aligned} \|(u - u_0)(t)\|_{X_\alpha} &\leq c_4(\alpha) g(t, x, \lambda) \\ &= c_4 c_1 t^{\beta-\alpha} \|x - x_0\|_{X_\beta} \\ &\quad + c_4 c_2 \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \| [F(u_0, \lambda) - F(u_0, \lambda_0)](s) \| ds \end{aligned}$$

Wäre $t^* < \sup I$, so würde für $\alpha = \beta$ aus (3.1.1) nach Konstruktion der Menge W die Ungleichung

$$\|(u - u_0)(t^*)\|_{X_\alpha} \leq \frac{2}{3} \varepsilon$$

folgen, was der Maximalität von t^* widerspräche. Wir erhalten also

$$\sup_{t \in I} \|u(t)\|_{X_\alpha} \leq \sup_{t \in I} \|u_0(t)\|_{X_\alpha} + \varepsilon \leq \rho,$$

und $(AP)_W$ ist nachgewiesen.

(ii) Wir betrachten nun eine beliebige nichtleere Teilmenge W von $M_\alpha \times \Lambda$, auf der die Bedingung $(AP)_W$ erfüllt sei. Für zwei beliebige Punkte $(x, \lambda), (x_0, \lambda_0) \in W$ definieren wir die Abbildungen $u = S(x, \lambda)$ und $u_0 = S(x_0, \lambda_0)$. Ersetzt man die in Beweisteil (i) erklärte Konstante ρ durch das R aus $(AP)_W$, ändert $c_3(\alpha)$ zu

$$c_3(\alpha) := \sup_{\substack{(t, \lambda) \in [0, T] \times U \\ x_1 \in M \cap RIB_Y, x_1 \neq x_2}} \frac{\|f(t, x_1, \lambda) - f(t, x_2, \lambda)\|}{\|x_1 - x_2\|_{Y_2}}$$

ab und behält alle anderen Konstanten bei, so erhält man auch für $\|\lambda - \lambda_0\|_Z \leq \delta_0$ die Abschätzung (3.1.1), diesmal sogar global auf $[0, T]$. Da für $\lambda = \lambda_0$ das Integral in (3.1.1) verschwindet, folgt (a) unmittelbar. Wählen wir $\beta = \alpha$ in (3.1.1), so ergibt sich für $\|x - x_0\|_{X_\alpha} \leq \delta$ und $\|\lambda - \lambda_0\|_Z \leq \delta$ aus der Konstruktion von δ die Ungleichung

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|(u - u_0)(t)\|_{X_\alpha} \leq \frac{2}{3} \epsilon < \epsilon,$$

womit wir auch (b) bewiesen haben. $\square$

Die Aussage (i) dieses Satzes, für deren Beweis wir die Voraussetzung (H3) natürlich nicht benötigen, besagt, daß der Lösungsoperator S unter den Voraussetzungen (H) und (L) für jedes $\alpha \in [\alpha_0, 1)$ auf einer relativ offenen Teilmenge von $M_\alpha \times \Lambda$ definiert werden kann. Wenn wir also im folgenden Lemma, in dem wir zeigen wollen, daß sich gewisse Differenzierbarkeitseigenschaften von f auf den Lösungsoperator übertragen, die Bedingung $(AP)_W$ für eine einpunktige Teilmenge W von $M_\alpha \times \Lambda$ voraussetzen, so beachte man, daß S

in einer $\mathbb{M}_\alpha \times \Lambda$ -Umgebung dieses Punktes definiert ist.

3.2 Lemma:

Es gelte (H) und (L), und für ein $\alpha \in [\alpha_0, 1)$ und einen Punkt

$(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{M}_\alpha \times \Lambda$ sei $\langle AP \rangle_{\{(x_0, \lambda_0)\}}$ erfüllt. Ist

$D_1 : [0, T] \times \mathbb{M}_Y \times \Lambda \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ eine stark stetige Abbildung, die für jede kompakte Teilmenge K von $\mathbb{M}_Y$ der Gleichung

$$(3.2.1) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0+} \sup_{\substack{(t,x) \in [0,T] \times K \\ y \in \mathbb{M}_Y \cap (x+\rho B_Y) \setminus \{x\}}} \frac{\|f(t,y,\lambda_0) - f(t,x,\lambda_0) - D_1(t,x,\lambda_0)(y-x)\|}{\|y-x\|_Y} = 0$$

genügt, und setzen wir

$$G_1(t) := D_1(t, S(x_0, \lambda_0)(t), \lambda_0) \quad \forall t \in [0, T],$$

so folgt

$$(i) \quad \lim_{\substack{\mathbb{M}_\alpha \ni x \xrightarrow{X_\alpha} x_0 \\ x \neq x_0}} \sup_{t \in [0, T]} \frac{\| [S(x, \lambda_0) - S(x_0, \lambda_0) - \bar{G}_1(x - x_0)](t) \|_{X_\alpha}}{\|x - x_0\|_{X_\alpha}} = 0$$

(ii) Falls außerdem eine stark stetige Abbildung

$$D_2 : [0, T] \times \mathbb{M}_Y \times \Lambda \rightarrow \mathcal{L}(Z, X)$$

existiert, so daß

$$(3.2.2) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0+} \sup_{\substack{(t,x) \in [0,T] \times K \\ y \in \mathbb{M}_Y \cap (x+\rho B_Y) \\ \lambda \in \Lambda \cap (\lambda_0+\rho B_\Lambda) \setminus \{\lambda_0\}}} \frac{\|f(t,y,\lambda) - f(t,y,\lambda_0) - D_2(t,x,\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)\|}{\|\lambda - \lambda_0\|_\Lambda} = 0$$

für jede kompakte Teilmenge K von $\mathbb{M}_Y$ gilt, so folgt mit

$$G_2(t) := D_2(t, S(x_0, \lambda_0)(t), \lambda_0) \quad \forall t \in [0, T]$$

die Gleichung

$$\lim_{\substack{\Lambda \ni \lambda \rightarrow \lambda_0 \\ \lambda \neq \lambda_0}} \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{\| (S(x_0, \lambda) - S(x_0, \lambda_0) - K_0 [\bar{G}_1(\cdot)(\cdot - x_0)])(t) \|_{X_\alpha}}{\| \lambda - \lambda_0 \|_Z} = 0$$

Beweis:

- (i) Setzen wir $u_0 := S(x_0, \lambda_0)$, so ist $K := u_0([0, T])$ eine kompakte Teilmenge von M_Y . Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es wegen $X_\alpha \hookrightarrow Y$ also nach (3.2.1) und Satz 3.1 (i), (ii)(a) eine Zahl $\delta(\varepsilon, K) > 0$ und eine von ε unabhängige Konstante $c_1 > 0$ derart, daß für $x \in M_\alpha \cap (x_0 + \delta \bar{B}_{X_\alpha})$ die Abbildungen $u = S(x, \lambda_0)$ und

$$r(\cdot, x) := F(u, \lambda_0) - F(u_0, \lambda_0) - \bar{G}_1(u - u_0)$$

wohldefiniert sind und für alle $t \in [0, T]$ die Ungleichung

$$(3.2.3) \quad \|r(t, x)\| \leq \varepsilon \|(u - u_0)(t)\|_{X_\alpha} \leq \varepsilon c_1 \|x - x_0\|_{X_\alpha}$$

erfüllt ist. Wegen

$$u - u_0 = H_0(x - x_0) + K_0[\bar{G}_1(u - u_0) + r(\cdot, x)]$$

folgt nach Lemma 1.9 (ii) mit (1.10) und (1.11) die Gleichung

$$u - u_0 = H_0 \bar{G}_1(x - x_0) + K_0 \bar{G}_1 r(\cdot, x),$$

aus der wir mit einer von ε unabhängigen Konstanten $c > 0$

gemäß (1.13), Lemma 1.11 und (3.2.3) für $t \in [0, T]$

$$\| [u - u_0 - H_0 \bar{G}_1(x - x_0)](t) \|_{X_\alpha} \leq \varepsilon c \|x - x_0\|_{X_\alpha}$$

abschätzen können.

- (ii) Geben wir uns $\varepsilon \in (0, 1]$ beliebig vor, so gibt es mit u_0 und K wie in (i) wegen (3.2.2) und Satz 3.1 (i), (ii)(b) eine Zahl $\delta(\varepsilon, K) > 0$, so daß für $\lambda \in \Lambda \cap (\lambda_0 + \delta \bar{B}_Z)$ die Abbildungen $u := S(x_0, \lambda)$,

$$r_1(\cdot, \lambda) := F(u, \lambda_0) - F(u_0, \lambda_0) - \bar{G}_1(u - u_0)$$

und

$$r_2(\cdot, \lambda) := F(u, \lambda) - F(u, \lambda_0) - G_2(\cdot)(\lambda - \lambda_0)$$

wohldefiniert sind und für $t \in [0, T]$ den Ungleichungen

$$(3.2.4) \quad \|r_1(t, \lambda)\| \leq \varepsilon \|(u - u_0)(t)\|_{X_\alpha}$$

und

$$(3.2.5) \quad \|r_2(t, \lambda)\| \leq \varepsilon \|\lambda - \lambda_0\|_Z$$

genügen. Wir wollen nun zeigen, daß man $r := r_1 + r_2$ durch

$\|\lambda - \lambda_0\|_Z$ abschätzen kann. Mit

$$c_0 := 1 + \sup_{0 \leq t \leq T} \|G_2(t)\|_{\mathcal{L}(Z, X)}$$

(vgl. (1.9)) folgt aus (3.2.5) die Ungleichung

$$(3.2.6) \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \| [F(u, \lambda) - F(u, \lambda_0)](t) \| \leq c_0 \|\lambda - \lambda_0\|_Z$$

Da wir nach Satz 3.1 (ii)(b) o.E. annehmen können, δ sei

so klein gewählt, daß

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t) - u_0(t)\|_{X_\alpha} \leq 1$$

gilt, so gibt es wegen (L) und $X_\alpha \hookrightarrow Y$ eine Konstante

$c_1 > 0$, so daß für alle $t \in [0, T]$

$$(3.2.7) \quad \| [F(u, \lambda_0) - F(u_0, \lambda_0)](t) \| \leq c_1 \|(u - u_0)(t)\|_{X_\alpha}$$

gilt. Mit der im Beweis von Satz 3.1 definierten Konstanten

$c_2(\alpha)$ ergibt sich nun aus (3.2.6) und (3.2.7) für

$t \in [0, T]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|(u - u_0)(t)\|_{X_\alpha} &\leq c_2(\alpha) c_0 \frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha} \|\lambda - \lambda_0\|_Z \\ &\quad + c_2(\alpha) c_1 \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|(u - u_0)(s)\|_{X_\alpha} ds, \end{aligned}$$

aus der gemäß Lemma 2.4 die Existenz einer von ε unabhängigen

Konstanten $c_3 > 0$ mit

$$(3.2.8) \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \| (u - u_0)(t) \|_{X_\alpha} \leq c_3 \|\lambda - \lambda_0\|_Z$$

folgt. Die Abbildung $r = r_1 + r_2$ läßt sich nun mit den Ungleichungen (3.2.4), (3.2.5) und (3.2.8) durch

$$(3.2.9) \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \| r(t, \lambda) \| \leq (1 + c_3) \varepsilon \|\lambda - \lambda_0\|_Z$$

abschätzen. Wegen

$$F(u, \lambda) - F(u_0, \lambda_0) = \bar{G}_1(u - u_0) + G_2(\cdot)(\lambda - \lambda_0) + r(\cdot, \lambda)$$

erhalten wir nach Lemma 1.9 (ii) mit (1.11) die Gleichung

$$u - u_0 = K_0^{-1} [\bar{G}_1(u - u_0) + G_2(\cdot)(\lambda - \lambda_0) + r(\cdot, \lambda)]$$

Die Duhamel'sche Formel (1.13) und Lemma 1.11 liefern nun mit (3.2.9) eine von ε unabhängige Konstante $c > 0$, mit der die Abschätzung

$$\| (u - u_0 - K_0^{-1} [G_2(\cdot)(\lambda - \lambda_0)])(t) \|_{X_\alpha} \leq c \varepsilon \|\lambda - \lambda_0\|_Z$$

für alle $t \in [0, T]$ gilt.

□

In diesem Lemma mußten wir, um S lokal definieren zu können, wenigstens für einen Punkt (x, λ) die Existenz einer globalen milden X -Lösung (oder eine a priori-Abschätzung) voraussetzen. Wir haben jedoch noch keine hinreichende Bedingung an f dafür angegeben, daß er überhaupt in irgendeinem Punkt $(x, \lambda) \in \mathbb{M}_{\alpha_0} \times \Lambda$ erklärt ist, d.h. daß $CP(x, \lambda)$ eine globale milde X_{α_0} -Lösung besitzt. Wir wollen nun zeigen, daß die Voraussetzung

- Es existiere ein Exponent $\sigma_0 \in [1, 2)$ derart, daß $\alpha := \alpha_0 \sigma_0 < 1$ ist und jedes $\mu \in \Lambda$ eine Λ -Umgebung $U(\mu)$ mit
- $$\sup_{(t,x,\lambda) \in [0,T] \times M_Y \times U(\mu)} \frac{\|f(t,x,\lambda)\|}{\|x\|_Y^{\sigma_0} + 1} < \infty$$
- (G) besitzt, wobei es im Falle $\sigma_0 > 1$ zu jeder Zahl $\rho > 0$ eine Konstante $R(\rho, \mu) > 0$ gebe, so daß für $(x, \lambda) \in (M_\alpha \cap \rho \overline{B}) \times U$ jede milde X_α -Lösung u von $CP(x, \lambda)$ mit Definitionsintervall I der a priori-Abschätzung
- $$\sup_{t \in I} \|u(t)\| \leq R^{-1}$$
- genügt.

eine solche Bedingung ist, die gleichzeitig einige für spätere Zwecke außerordentlich nützliche Abschätzungen für S zur Folge hat.

3.3 Lemma:

Unter den Voraussetzungen (H1), (H2) und (G) gibt es zu jeder nichtleeren kompakten Teilmenge Λ_0 von Λ eine Λ -Umgebung U von Λ_0 , so daß zu beliebigen Zahlen $\gamma \in [0, \alpha]$, $\beta \in [\alpha, 1)$ und $\rho > 0$ stets eine (im Falle $\sigma_0 = 1$ von ρ unabhängige) Konstante $c = c(\gamma, \beta, \rho) > 0$ existiert derart, daß für $(x, \lambda) \in (M_\alpha \cap \rho \overline{B}) \times U$ und jede milde X_α -Lösung u von $CP(x, \lambda)$ mit Definitionsintervall I

1) Dies ist z.B. erfüllt, falls M in X unbeschränkt ist (vgl. die Bemerkung im Anschluß an Theorem 2.7).

$$\|u(t)\|_{X_\beta} \leq c t^{\gamma-\beta} (\|x\|_{X_Y} + 1) \quad \forall t \in I \setminus \{0\}$$

gilt. Insbesondere ist für jede Zahl $\rho > 0$ die Bedingung

$$(AP) (\mathbb{M}_\alpha \cap \rho \overline{B}) \times U_\rho \text{ erfüllt.}$$

Beweis:

Konstruieren wir uns zu jedem $\mu \in \Lambda_0$ eine in Λ offene Umgebung $U(\mu)$ gemäß (G), so können wir endlich viele $\mu_i \in \Lambda_0$ auswählen, für die

$$U := \bigcup_{i=1}^m U(\mu_i)$$

bereits eine Λ -Umgebung von Λ_0 ist. Wir geben uns nun Zahlen

$\gamma \in [0, \alpha]$, $\beta \in [\alpha, 1]$ und $\rho > 0$ vor. Für jeden Index

$i \in \{1, \dots, m\}$ erhält man aus der Wachstumsbedingung in (G) wegen

$X_{\alpha_0} \hookrightarrow Y$ mit der Momentenungleichung (1.3) die Existenz

einer Konstanten $c(\mu_i) > 0$, für die jede milde X_α -Lösung u

von $CP(x, \lambda)$ mit Definitionsintervall I und

$(x, \lambda) \in (\mathbb{M}_\alpha \cap \rho \overline{B}) \times U(\mu_i)$ der Abschätzung

$$\|F(u, \lambda)(t)\| \leq c(\mu_i) (\|u(t)\|_{X_\alpha}^{\sigma_0-1} \|u(t)\|_{X_\alpha}^{\sigma_0-1} + 1) \quad \forall t \in I$$

genügt. Aus dieser Ungleichung ergeben sich wegen $X_\beta \hookrightarrow X_\alpha$

mit Hilfe der für $\sigma_0 > 1$ in (G) enthaltenen a priori-Abschätzung

und Lemma 1.3 (i) positive Konstanten $c_1(\mu_i, \gamma, \beta, \rho)$ und

$c_2(\mu_i, \beta, \rho)$, die für $\sigma_0 = 1$ unabhängig von ρ sind, so daß für

alle $t \in I \setminus \{0\}$

$$\|u(t)\|_{X_\beta} \leq c_1 t^{\gamma-\beta} (\|x\|_{X_Y} + 1) + c_2 \int_0^t (t-s)^{-\beta} \|u(s)\|_{X_\beta} ds$$

gilt. Nach Anwendung der Lemmata 2.4 und 1.8 erhalten wir eine Kon-

stante $c_i = c(\mu_i, \gamma, \beta, \rho) > 0$ mit

$$\|u(t)\|_{X_\beta} \leq c_i t^{\gamma-\beta} (\|x\|_{X_Y} + 1) \quad \forall t \in I \setminus \{0\}.$$

Mit $c := \max_{1 \leq i \leq m} c_i$ folgt die behauptete Ungleichung. Wählt man $\gamma = \alpha = \beta$, so liefert sie für beliebiges $\rho > 0$ die Gültigkeit von $(AP)_{(\mathbb{M}_\alpha \cap \rho \overline{B}) \times U}$. $\square$

Unter den Voraussetzungen (H), (L) und (G) besitzt also jede kompakte Teilmenge Λ_0 von Λ eine Λ -Umgebung U derart, daß sich $\mathbb{M}_\alpha \times U$ als Vereinigung von Mengen $W \subset \mathbb{M}_\alpha \times U$, die der Bedingung $(AP)_W$ genügen, darstellen läßt, so daß S auf der gesamten Menge $\mathbb{M}_\alpha \times U$ definiert werden kann.

Als nächstes wollen wir u.a. nachweisen, daß die Bedingung (G) stets erfüllt ist, falls f im Sinne der folgenden Voraussetzung

$$(AL) \left\{ \begin{array}{l} \text{Es existiere eine stark stetige Abbildung} \\ D : [0, T] \times \Lambda \rightarrow \mathcal{L}(Y, X) \text{ derart, daß} \\ \text{jedes } \mu \in \Lambda \text{ eine } \Lambda\text{-Umgebung } U(\mu) \text{ mit} \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sup_{\substack{(t, \lambda) \in [0, T] \times U(\mu) \\ x \in \mathbb{M}_Y \cap \rho \overline{B}_Y}} \frac{\|f(t, x, \lambda) - D(t, \lambda)x\|}{\rho} = 0 \\ \text{besitzt.} \end{array} \right.$$

bezüglich der Variablen x asymptotisch linear ist. Außerdem werden wir sehen, daß auch diese asymptotische Eigenschaft in gewissem Sinne von f an den Lösungsoperator S weitergegeben wird.

3.4 Satz:

Die Bedingung (AL) impliziert (G) für $\sigma_0 = 1$, und unter den Voraussetzungen (H), (L) und (AL) besitzt jede kompakte Teilmenge Λ_0 von Λ eine Λ -Umgebung U , für die

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sup_{\substack{(t,\lambda) \in [0,T] \times U \\ x \in \mathbb{M}_\alpha \cap \rho \overline{B}_{X_\alpha}}} \frac{\| [S(x,\lambda) - H_0^{\overline{D}(\lambda)} x] (t) \|_{X_\alpha}}{\rho} = 0$$

für alle $\alpha \in [\alpha_0, 1)$ gilt.

Beweis:

Setzen wir für $(t, x, \lambda) \in [0, T] \times \mathbb{M}_Y \times \Lambda$

$$r_0(t, x, \lambda) := f(t, x, \lambda) - D(t, \lambda)x,$$

so gibt es gemäß (AL) zu jedem $\mu \in \Lambda$ eine in Λ offene Umgebung

$U(\mu)$, so daß zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl

$\rho_0(\mu, \varepsilon)$ existiert, für die

$$\sup_{\substack{(t,\lambda) \in [0,T] \times U(\mu) \\ x \in \mathbb{M}_Y \cap \rho \overline{B}_Y}} \|r_0(t, x, \lambda)\| \leq \varepsilon \quad \forall \rho \geq \rho_0(\mu, \varepsilon)$$

gilt. Mit $c_0(\mu, \varepsilon) := \rho_0(\mu, \varepsilon)$ ergibt sich daraus für $x \in \mathbb{M}_Y$ die Ungleichung

$$(3.4.1) \quad \sup_{(t,\lambda) \in [0,T] \times U(\mu)} \|r_0(t, x, \lambda)\| \leq \max\{\varepsilon \|x\|_Y, c_0(\mu, \varepsilon)\} \\ \leq \varepsilon \|x\|_Y + c_0(\mu, \varepsilon).$$

Da wir nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit $U(\mu)$

o.E. so klein wählen können (vgl. (1.9)), daß

$$(3.4.2) \quad \sup_{(t,\lambda) \in [0,T] \times U(\mu)} \|D(t, \lambda)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} < \infty$$

gilt, folgt aus (3.4.1) für alle $x \in \mathbb{M}_Y$ mit einer von x unabhängigen positiven Konstante $c_1(\varepsilon)$ die Ungleichung

$$(t, \lambda) \in [0, T] \times U(\mu) \quad \|f(t, x, \lambda)\| \leq c_1(\varepsilon) \|x\|_Y + c_0(\varepsilon),$$

aus der (G) für $\sigma_0 = 1$ unmittelbar folgt. Wie im Beweis von Lemma

3.3 können wir nun endlich viele $\mu_i \in \Lambda_0$ auswählen, so daß

$$U := \bigcup_{i=1}^m U(\mu_i)$$

eine Λ -Umgebung von Λ_0 ist. Nach Lemma 3.3 sind für

$\alpha \in [\alpha_0, 1)$ und $(x, \lambda) \in \mathbb{M}_\alpha \times U$ die Abbildungen

$u = S(x, \lambda)$ und

$$r(., x, \lambda) = F(u, \lambda) - \overline{D}(\lambda)u$$

wohldefiniert, und es gibt eine von ϵ , λ und x unabhängige

positive Konstante $c_1 = c_1(\alpha)$ mit

$$(3.4.3) \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{X_\alpha} \leq c_1 (\|x\|_{X_\alpha} + 1).$$

Wegen

$$[\text{id} - K_0 \overline{D}(\lambda)] u = H_0 x + K_0 r(., x, \lambda)$$

folgt aus Lemma 1.9 (ii) die Gleichung

$$(3.4.4) \quad u = H_0 \overline{D}(\lambda) x + K_0 \overline{D}(\lambda) r(., x, \lambda).$$

Da D gemäß (3.4.2) auch auf $[0, T] \times U$ normbeschränkt ist,

können wir Lemma 1.11 anwenden. Beachtet man, daß mit

$$c_0(\epsilon) := \max_{1 \leq i \leq m} c_0(u_i, \epsilon)$$

aus (3.4.1) die Ungleichung

$$\sup_{(t, \lambda) \in [0, T] \times U} \|r_0(t, x, \lambda)\| \leq \epsilon \|x\|_Y + c_0(\epsilon) \quad \forall x \in \mathbb{M}_Y$$

folgt, so erhält man aus (3.4.4) mit (1.13), Lemma 1.11 und

(3.4.3) die Abschätzung

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|(u - H_0 \overline{D}(\lambda) x)(t)\|_{X_\alpha} \leq c_2 \epsilon \|x\|_{X_\alpha} + c(\epsilon)$$

mit zwei von x und λ unabhängigen positiven Konstanten

$c_2 = c_2(\alpha)$ und $c(\epsilon) = c(\epsilon, \alpha)$, wobei c_2 auch unabhängig

von ϵ ist. Aus dieser Ungleichung ergibt sich die Behauptung. $\square$

Falls (X, P) ein OBR ist, so folgt unter den Voraussetzungen dieses Satzes für $\mathbb{M} = P$ unmittelbar, daß $S(., \lambda)$ für jedes $\lambda \in \Lambda$ im Sinne der in § 0. benutzten Definition asymptotisch linear ist mit

$$D_1 S(\infty, \lambda) = H_0^{\overline{D}(\lambda)} .$$

Ebenso ergibt sich unter den Voraussetzungen von Lemma 3.2 sofort die Existenz der partiellen Ableitungen

$$D_1 S(x_0, \lambda_0) = H_0^{\overline{G}_1}$$

bzw.

$$D_2 S(x_0, \lambda_0) = K_0^{\overline{G}_1} G_2(\cdot) ,$$

falls M_Y eine volle X_α -Umgebung bzw. Λ eine volle Z -Umgebung enthält. Wir wollen nun die Voraussetzungen von Lemma 3.2 dahingehend verschärfen, daß wir aus seiner Aussage stetige Differenzierbarkeit (oder wenigstens stetige rechtsseitige Differenzierbarkeit) für S folgern können.

3.5 Satz:

Unter den Voraussetzungen (H) und (L) seien

$$D_1 \in C([0, T] \times M_Y \times \Lambda, \mathcal{L}(Y, X))$$

und

$$D_2 \in C([0, T] \times M_Y \times \Lambda, \mathcal{L}(Z, X))$$

zwei Abbildungen, die für jedes $\lambda_0 \in \Lambda$ und jede kompakte Teilmenge K von M_Y den Bedingungen (3.2.1) und (3.2.2) genügen. Ferner sei $\alpha \in [\alpha_0, 1)$ und W eine nichtleere Teilmenge von $M_\alpha \times \Lambda$, für die $(AP)_W$ erfüllt ist.

Dann folgt:

- (i) $S \in C^1(W, C([0, T], X_\alpha))$, falls W offen in $X_\alpha \times Z$ ist.
- (ii) Ist $X_\alpha \times Z$ ein OBR und W rechtsseitig offen in $X_\alpha \times Z$, so ist S in W stetig rechtsseitig differenzierbar.

Setzen wir für $(t, x, \lambda) \in [0, T] \times W$

$$G_i(t, x, \lambda) := D_i(t, S(x, \lambda)(t), \lambda) , \quad i = 1, 2 ,$$

so ist die Ableitung in beiden Fällen durch

$$S'_{(+)}(x, \lambda) = (H_0^{\overline{G}_1(x, \lambda)}, K_0^{\overline{G}_1(x, \lambda)} G_2(\cdot, x, \lambda))$$

gegeben.

Beweis:

Nach Lemma 3.2 ist lediglich die Stetigkeit der partiellen Ableitungen

$$D_1^{(+)} S(x, \lambda) = H_0^{\overline{G}_1(x, \lambda)}$$

und

$$D_2^{(+)} S(x, \lambda) = K_0^{\overline{G}_1(x, \lambda)} G_2(\cdot, x, \lambda)$$

bzgl. $(x, \lambda) \in W$ nachzuweisen. Für $(x_0, \lambda_0), (x, \lambda) \in W$ und

$(h, \mu) \in X_\alpha \times Z$ schätzen wir daher die Differenz von

$$v := H_0^{\overline{G}_1(x, \lambda)} h + K_0^{\overline{G}_1(x, \lambda)} G_2(\cdot, x, \lambda) \mu$$

und

$$v_0 := H_0^{\overline{G}_1(x_0, \lambda_0)} h + K_0^{\overline{G}_1(x_0, \lambda_0)} G_2(\cdot, x_0, \lambda_0) \mu$$

ab. Mit Hilfe von (1.10) und (1.11) gelangen wir zu der Gleichung

$$(3.5.1) \quad v - v_0 = K_0^{\overline{G}_1(x, \lambda)} [(G_1(x, \lambda) - \overline{G}_1(x_0, \lambda_0)) v_0 + (G_2(\cdot, x, \lambda) - G_2(\cdot, x_0, \lambda_0)) \mu]$$

Wählen wir nun $\varepsilon > 0$ und setzen $V_1 := Y$ und $V_2 := Z$, so gibt es wegen

$$G_i \in C([0, T] \times M_\alpha \times \Lambda, \mathcal{L}(V_i, X))$$

eine Zahl $\delta > 0$, so daß mit $\tilde{\Lambda} := M_\alpha \times \Lambda$

$$(3.5.2) \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \|G_i(t, x, \lambda) - G_i(t, x_0, \lambda_0)\|_{\mathcal{L}(V_i, X)} \leq \varepsilon$$

für alle $(x, \lambda) \in \tilde{\Lambda} \cap ((x_0, \lambda_0) + \delta \overline{B}_{X_\alpha \times Z}) =: \tilde{\Lambda}_0$ gilt. Ersetzt man

Λ durch $\tilde{\Lambda}$ und Λ_0 durch $\tilde{\Lambda}_0$, so ist insbesondere (1.9) für G_i

erfüllt, und nach (3.5.1), (3.5.2), (1.13) und Lemma 1.11 können wir

wegen $X_\alpha \hookrightarrow Y$ für $(x, \lambda) \in \tilde{\Lambda}_0$ und $t \in [0, T]$

$$(3.5.3) \quad \begin{cases} \| (v - v_0)(t) \|_{X_\alpha} \leq c_1 \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \varepsilon (\|v_0(s)\|_{X_\alpha} + \|\mu\|_Z) ds \\ \leq c_1 \varepsilon \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (c_2 \|h\|_{X_\alpha} + c_3 \int_0^s (s-\sigma)^{-\alpha} \|\mu\|_Z d\sigma + \|\mu\|_Z) ds \\ \leq c_4 \varepsilon (\|h\|_{X_\alpha} + \|\mu\|_Z) \end{cases}$$

Da die auftretenden Konstanten c_i von $\epsilon, t, x, \lambda, h$ und μ unabhängig sind, folgt aus dieser Abschätzung die Stetigkeit der partiellen Ableitungen von S , und die Behauptung ist bewiesen. $\square$

Sind X und Z unter den Voraussetzungen dieses Satzes geordnete Banachräume und ist W eine in $X_\alpha \times Z$ rechtsseitig offene konvexe Teilmenge von $M_\alpha \times \Lambda$, so ist S in W nach Theorem 0.5 (iii) und Lemma 2.9 (ii) wachsend, falls für $(x, \lambda) \in W$ und $0 \leq \tau \leq t \leq T$

$$U_{G_1}^-(x, \lambda)(t, \tau) \in \mathcal{L}^+(X)$$

und

$$G_2(t, x, \lambda) \in \mathcal{L}^+(Z, X)$$

gilt. Man erhält auf diese Art einen Vergleichssatz über milde X_α -Lösungen von $CP(x, \lambda)$ für verschiedene Daten (x, λ) . Eine eng damit verwandte Aussage wollen wir nun ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an f beweisen.

3.6 Satz:

Es sei (X, P) ein OBR mit normalem Kegel P , $(H1)$, $(P1)$ und $(H2.1)$ seien erfüllt, und es sei $f \in C([0, T] \times Y, X)$ eine Abbildung, die für jedes $\rho > 0$ der Lipschitzbedingung

$$(3.6.1) \quad \sup_{\substack{(t, x_1) \in [0, T] \times \rho \overline{B}_Y \\ x_1 \neq x_2}} \frac{\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|}{\|x_1 - x_2\|_Y} < \infty$$

und für ein $\sigma_0 \in [1, 2)$ der Wachstumsbedingung

$$(3.6.2) \quad \sup_{(t, x) \in [0, T] \times Y} \frac{\|f(t, x)\|}{\|x\|_Y^{\sigma_0} + 1} < \infty$$

genügt. Ferner seien für zwei nichtleere Teilmengen M_1, M_2 von X und $\alpha = \alpha_0 \sigma_0$ die Abbildungen $f_i \in C([0, T] \times (M_i \cap Y), X)$ und zwei globale milde X_α -Lösungen u_i von

$$\dot{u} + A(t)u = f_i(t, u), \quad 0 < t \leq T, \quad i = 1, 2,$$

gegeben derart, daß $u_1(0) \leq u_2(0)$ gilt und für alle $(t, x) \in [0, T] \times P_{\alpha_0}$ und $x' \in P^* \cap \{x\}^0$ die Ungleichungen

$$(3.6.3) \quad \langle x', f(t, u_1(t) + x) - f(t, u_1(t)) \rangle \geq 0$$

und

$$(3.6.4) \quad \langle x', f_2(t, u_2(t)) - f(t, u_2(t) - x) \rangle \geq 0$$

erfüllt sind. Dann besitzt

$$(3.6.5) \quad \begin{aligned} \dot{u} + A(t)u &= f(t, u), \quad 0 < t \leq T \\ u(0) &= x \end{aligned}$$

zu jedem $x \in [u_1(0), u_2(0)]_{\alpha}^{1)}$ genau eine globale milde X_{α} -Lösung u , und es gilt $u \in [u_1, u_2]$.

Beweis:

Wählen wir $x \in [u_1(0), u_2(0)]_{\alpha}$, so implizieren die Voraussetzungen über f , daß (3.6.5) nach Theorem 2.7 genau eine milde X_{α} -Lösung u mit maximalem Existenzintervall I besitzt. Wir setzen nun für

$$(t, x) \in [0, T] \times Y$$

$$g_i(t, x) := (-1)^i [f_i(t, u_i(t)) - f(t, u_i(t) + (-1)^{i-1}x)] \quad , \quad i = 1, 2.$$

Man zeigt sofort, daß die Abbildungen $w_i := (-1)^i (u_i - u)|_I$ milde X_{α} -Lösungen von

$$(3.6.6) \quad \begin{aligned} \dot{v} + A(t)v &= g_i(t, v) \\ v(0) &= (-1)^i [u_i(0) - x] \end{aligned}$$

auf I sind. Da für alle $(t, x) \in [0, T] \times P_{\alpha_0}$ und $x' \in P^* \cap \{x\}^0$ die Ungleichung

$$\langle x', g_i(t, x) \rangle \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2,$$

¹⁾ Hier ist das Ordnungsintervall $[u_1(0), u_2(0)] \cap X_{\alpha}$ in X_{α} gemeint.

gilt (vgl. (P2)), gibt es nach Lemma 2.8, Lemma 0.1 (ii) und Theorem 2.7 genau eine nichtnegative milde X_α -Lösung v_1 von (3.6.6) mit maximalem Existenzintervall I_1 . Wegen des Verhaltens maximaler Fortsetzungen am Rande ihres Existenzintervalls ist v_1 eine Fortsetzung von w_1 , und wir erhalten die Ungleichung

$$(3.6.7) \quad u_1 \leq u_1 + v_1 = u = u_2 - v_2 \leq u_2 \quad \text{auf } I,$$

aus der aufgrund der Normalität von P und der Beschränktheit der Mengen $u_1([0, T])$ in X die Abschätzung

$$\sup_{t \in I} \|u(t)\| < \infty$$

folgt, die wiederum wegen (3.6.2) wie im Beweis von Lemma 3.3 impliziert, daß $u(I)$ sogar in X_α und damit in Y beschränkt ist. Folglich ist u gemäß Theorem 2.7 eine globale milde X_α -Lösung von (3.6.5), und die Ungleichung (3.6.7) ist auf ganz $[0, T]$ erfüllt. $\square$

Da man in diesem Satz stets $f_1 = 0$ und $u_1 = 0$ wählen kann, liefert er *nichtnegative* milde X_α -Lösungen, wenn man die Ungleichung (3.6.3) durch die einfachere Bedingung

$$\langle x', f(t, x) \rangle \geq 0$$

ersetzt (vgl. (P2)).

Aus Gründen der Bequemlichkeit werden wir im folgenden unter der Voraussetzung (H2) bzw. (H2') die Abbildung f bzw. G für $\alpha \in [\alpha_0, 1]$ in etwas nachlässiger Sprechweise quasiwachsend bzw. quasipositiv in M_α nennen, falls dies für alle $(t, \lambda) \in [0, T] \times \Lambda$ auf $f(t, \cdot, \lambda)$ bzw. $G(t, \lambda)$ zutrifft. Man sieht sofort, daß die Ungleichungen (3.6.3) und (3.6.4) erfüllt sind, falls f in diesem Sinne quasiwachsend in X_{α_0} ist und den Ordnungsrelationen

$$F_1(u_1) \leq F(u_1), \quad F(u_2) \leq F_2(u_2)$$

genügt. Ebenso gut kann man voraussetzen, daß f_1 und f_2 quasiwachsend in X_{α_0} sind und den Ungleichungen

$$f_1(t, u_1(t) + x) \leq f(t, u_1(t) + x)$$

$$f(t, u_2(t) - x) \leq f_2(t, u_2(t) - x)$$

für alle $(t, x) \in [0, T] \times P_{\alpha_0}$ gehorchen. In diesem Fall müssen allerdings M_1 und M_2 groß genug sein, damit diese Ungleichungen überhaupt erklärt sind.

In Lemma 2.9 (i) haben wir bereits eine in X_{α_0} quasipositive Abbildung G untersucht. Wir werden noch häufiger auf solche Abbildungen zurückkommen (vgl. etwa Satz 4.6, Satz 5.6, Satz 5.14).

3.7 Bemerkungen:

- (i) Resultate, die mit den Sätzen 3.1 und 3.5 verwandt sind, findet man z. B. in einer Arbeit von J. Rauch [49, Theorem 5, 7], in den von J. Marsden und M. McCracken gesammelten Beiträgen über Hopfbifurkation ([38, (8 A. 29) - (8 A. 33)]) und in dem Lehrbuch von M.A. Krasnosel'skii ([32, Theorem 23.13]).
- (ii) Die in (G) enthaltene Wachstumsbedingung ist eine Standardvoraussetzung zum Nachweis der globalen Existenz von Lösungen (vgl. [26, Theorem 3], [31, Lemma 6], [37, Theorem 2], [9, Proposition 4.5], [10, Corollary 3.7], [47, Corollary 3.2 (b)]).

§ 4. Einige Sätze zur Existenz und Stabilität T-periodischer Lösungen

Wir beginnen mit der folgenden Definition:

4.1 Definition:

Unter den Voraussetzungen (H1) und (H2) nennen wir für $\lambda \in \Lambda$ jede globale milde Y-Lösung von $(E\lambda)$, die der Gleichung $u(T) = u(0)$ in Y genügt, *T-periodisch*.

Gemäß Lemma 2.2 (i) gilt für den Anfangswert $x := u(0)$ einer T-periodischen milden Y-Lösung u von $(E\lambda)$ stets

$$x = u(T) \in X_\alpha \quad \forall \alpha \in [0,1),$$

so daß wegen $F(u, \lambda) \in C([0, T], X)$ nach Lemma 1.5 (i)(a) stets

$$(4.1) \quad u \in C^{1-\alpha}([0, T], X_\alpha) \quad \forall \alpha \in (0,1)$$

folgt. Für $\alpha \in [\alpha_0, 1)$ ist es daher überflüssig, bei T-periodischen milden X_α -Lösungen den Raum X_α näher zu kennzeichnen. Wir werden ihn daher fortlassen und allgemein nur von *T-periodischen milden Lösungen* der Gleichung $(E\lambda)$ reden. Unter den Voraussetzungen (H) und (L) können wir für jede Zahl $\alpha \in [\alpha_0, 1)$ und jede nichtleere Teilmenge W von $IM_\alpha \times \Lambda$, für die $(AP)_W$ erfüllt ist, durch

$$\pi(x, \lambda) := S(x, \lambda)(T) \quad \forall (x, \lambda) \in W$$

einen Operator

$$\pi \in C(W, IM_\alpha)$$

definieren. Wir nennen $\pi(\cdot, \lambda)$ den zu $(E\lambda)$ gehörigen *Poincaré-Operator* und lassen wie bei der Definition von S die Abhängigkeit dieses Operators von W und α in der Schreibweise unberücksichtigt.

Der Poincaré-Operator $\pi(\cdot, \lambda)$ ermöglicht es uns, das Problem der Bestimmung T-periodischer milder Lösungen von $(E\lambda)$ als ein Fixpunktproblem

zu behandeln, da seine Fixpunkte genau die Anfangswerte $u(0)$ der T -periodischen milden Lösungen u von $(E\lambda)$ mit $(u(0), \lambda) \in W$ sind. Falls außer den Voraussetzungen (H) und (L) auch (G) erfüllt ist, gibt es zu jeder kompakten Teilmenge Λ_0 von Λ eine Λ -Umgebung U derart, daß wir π für $\alpha = \alpha_0 \sigma_0$ auf der gesamten Menge $\mathbb{M}_\alpha \times U$ definieren können (vgl. Bem. nach Lemma 3.3), und es gilt

$$\pi \in C(\mathbb{M}_\alpha \times U, \mathbb{M}_\alpha).$$

4.2 Definition:

Es gelte (H1) und (H2), und zu $\lambda \in \Lambda$ sei $\underline{u}$ eine T -periodische milde Lösung von $(E\lambda)$.

- (i) Falls IE eine Teilmenge von $C([0, T], \mathbb{M}_\gamma)$ ist, die $\underline{u}$ enthält, und für jede T -periodische milde Lösung $u \in IE$ von $(E\lambda)$ $\underline{u} \leq u$ gilt, so nennen wir $\underline{u}$ die¹⁾ bzgl. IE minimale T -periodische milde V -Lösung von $(E\lambda)$.
- (ii) Falls $\pi(., \lambda)$ auf einer Teilmenge D von $\mathbb{M}_\gamma$ definiert ist, die den Punkt $\underline{x} = \underline{u}(0)$ enthält, so nennen wir $\underline{x}$ den¹⁾ bzgl. D minimalen Fixpunkt von $\pi(., \lambda)$, falls $\underline{x} \leq x$ für jeden Fixpunkt $x \in D$ von $\pi(., \lambda)$ gilt.
- (iii) Ist $\pi(., \lambda)$ im Fixpunkt $\underline{x} = \underline{u}(0)$ differenzierbar, so heißt $\underline{x}$ schwach stabil, falls $r(D_1 \pi(\underline{x}, \lambda)) \leq 1$ gilt. Ist das strikte Kleinerzeichen erfüllt, so nennen wir $\underline{x}$ stabil. Falls $r(D_1 \pi(\underline{x}, \lambda))$ größer als 1 ist, heißt $\underline{x}$ instabil.

¹⁾ Aufgrund der Antisymmetrie der betrachteten Ordnungen sind $\underline{u}$ und $\underline{x}$ eindeutig bestimmt.

Wir wollen nun einige einfache Sätze zur Existenz, Nichtexistenz und Stabilität T -periodischer milder Lösungen von $(E\lambda)$ beweisen, die Abhängigkeit solcher Lösungen vom Parameter λ allerdings erst im nächsten Paragraphen diskutieren. Deshalb betrachten wir hier der Einfachheit halber die Gleichung

$$(E) \quad \dot{u} + A(t)u = f(t, u), \quad 0 < t \leq T,$$

mit einer λ -unabhängigen Nichtlinearität f . Wie in diesem Fall die Voraussetzungen $(H2.2)$, $(H3.3)$, $(P2)$, (L) , (G) und (AL) uminterpretiert werden müssen, braucht wohl nicht näher erläutert zu werden. In allen im Zusammenhang mit der Gleichung $(E\lambda)$ eingeführten Bezeichnungen lassen wir den Parameter λ einfach weg, wenn wir über die Gleichung (E) reden.

4.3 Satz:

Es gelte (H) , (L) , (G) und (K) , und es sei G eine in X beschränkte, konvexe Teilmenge von M , für die $G_\alpha := G \cap X_\alpha$ nichtleer und in X_α abgeschlossen ist.

Falls ferner

$$\pi(G_\alpha) \subset G$$

gilt, so folgt

- (i) Die Gleichung (E) besitzt mindestens eine T -periodische milde Lösung u mit $u(0) \in G$.
- (ii) Falls (X, P) ein OBR mit normalem Kegel P , u_0 eine milde X_α -Lösung von (E) mit

$$u_0(T) \geq u_0(0) \in G_\alpha$$

und S in G_α wachsend ist (vgl. Bem. im Anschluß an Satz 3.5), so konvergiert die Folge

$$x_k = \pi^k(u_0(0)), \quad k \in \mathbb{N},$$

in X_α monoton wachsend gegen den bzgl. $M_Y \cap (u_0(0) + P)$ minimalen Fixpunkt $\underline{x} \in G_\alpha$ von π , und $\underline{u} = S(\underline{x})$ ist die bzgl.

$$C([0, T], M_Y) \cap (u_0 + C_+([0, T], Y))$$

minimale T-periodische milde Lösung von (E).

- (iii) Besitzt P_α unter den Voraussetzungen von (ii) innere Punkte (in X_α) und π an der Stelle $\underline{x}$ eine in X_α stark positive Ableitung, so ist $\underline{x}$ schwach stabil, falls $u_0(0) \ll \underline{x}$ gilt.

Beweis:

- (i) Nach Lemma 3.3 gilt $(AP)_{G_\alpha}$, so daß gemäß Satz 3.1 (ii) mit S auch π stetig auf G_α ist. Wählen wir $\beta \in (\alpha, 1)$, so folgt aus Lemma 3.3 (mit $\gamma = 0$), daß π die Menge G_α beschränkt nach $G \cap X_\beta$ und somit (vgl. Lemma 1.1) auf eine relativ kompakte Teilmenge von G_α abbildet. Als kompakte Selbstabbildung der abgeschlossenen konvexen Menge G_α besitzt π nach dem Schauderschen Fixpunktsatz einen Fixpunkt $x \in G_\alpha$, der uns die T-periodische milde Lösung $u = S(x)$ liefert.
- (ii) Die Voraussetzungen implizieren, daß $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset G_\alpha$ eine relativ kompakte wachsende Folge ist und somit in X_α gegen einen Grenzwert $\underline{x} \in G_\alpha$ konvergiert, der wegen der Stetigkeit von π ein Fixpunkt des Poincaré-Operators ist. Ist $x \in M_Y \cap (u_0(0) + P)$ ein beliebiger Fixpunkt von π , so genügt das Ordnungsintervall $[u_0(0), x]$ den gleichen Voraussetzungen wie G , so daß wir in der obigen Argumentation G durch $[u_0(0), x]$ ersetzen können und somit $\underline{x} \in [u_0(0), x]$ erhalten. Das gleiche Argument ist auf $x = u(0)$ anwendbar, wenn

$$u \in C([0, T], M_Y) \cap (u_0 + C_+([0, T], Y))$$

eine beliebige T-periodische milde Lösung von (E) ist. Da S

wachsend ist, ergibt sich

$$\underline{u} = S(\underline{x}) \leq S(x) = u$$

(iii) Wäre $\underline{x}$ nicht schwach stabil, so gäbe es nach Theorem 0.5 (iv) einen Vektor $h \in P_{\alpha}^0$ derart, daß für hinreichend kleines $t > 0$ die Ungleichungen

$$\pi(\underline{x} - th) << \underline{x} - th$$

$$u(0) << \underline{x} - th$$

gelten würden. Dann könnten wir jedoch den in (ii) geführten Beweis mit $[u_0(0), \underline{x} - th]$ anstelle von $\mathbb{G}$ führen und erhielten einen Fixpunkt von π in $[u_0(0), \underline{x} - th]$, den es wegen der Minimalität von $\underline{x}$ nicht geben kann. $\square$

Im Beweis dieses Satzes sind wir die Fixpunktgleichung $\pi(x) = x$ *direkt* angegangen. Doch manchmal ist es sinnvoller, eine dazu äquivalente transformierte Gleichung zu behandeln. Ein Beispiel dafür ist der Beweis des folgenden Satzes:

4.4 Satz:

Es gelte (H1), (H2), (K), (L) und (AL) mit $M = X$. Falls

$$U_D(T, 0)x \neq x \quad \forall x \in X_{\alpha_0}$$

erfüllt ist, so besitzt (E) mindestens eine T-periodische milde Lösung.

Beweis:

Da $Q := U_D(T, 0)$ ein kompakter Operator in X_{α_0} ist, besitzt $\text{id} - Q$ in $\mathcal{L}(X_{\alpha_0})$ eine Inverse, und nach Satz 3.4 gilt

$$\|x\|_{X_{\alpha_0}} \leq R \quad \frac{\|\pi(x) - Qx\|_{X_{\alpha_0}}}{R} \leq \frac{1}{\|(\text{id} - Q)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_{\alpha_0})}}$$

für hinreichend großes $R > 0$. Nach dem Schauderschen Fixpunktsatz

besitzt

$$C := (\text{id} - Q)^{-1} \circ (\pi - Q)$$

als kompakte Selbstabbildung der Kugel $R \overline{B}_{X_{\alpha_0}}$ einen Fixpunkt

$x_0 \in R \overline{B}_{X_{\alpha_0}}$. Da C die gleichen Fixpunkte wie π hat, ist

$u = S(x_0)$ eine T -periodische milde Lösung von (E). $\square$

Dieser Satz besitzt ein Analogon für *nichtnegative* T -periodische milde Lösungen in einem OBR:

4.5 Satz:

Es sei (X, P) ein OBR, und die Voraussetzungen (H1), (H2), (K), (L) und (AL) seien mit $M = P$ erfüllt. Ferner gelte (P1), (P2) und

$$U_D(T, 0)x \neq \lambda x \quad \forall (\lambda, x) \in [1, \infty) \times S_{X_{\alpha_0}}^+.$$

Dann besitzt (E) mindestens eine *nichtnegative* T -periodische milde Lösung.

Beweis:

Aus Lemma 2.8, Lemma 0.1 (ii), Lemma 3.3, Lemma 1.1 und Satz 3.4 ergibt sich, daß $\pi : P_{\alpha_0} \rightarrow P_{\alpha_0}$ vollstetig und asymptotisch linear ist mit

$$\pi'(\infty) = U_D(T, 0).$$

Somit folgt die Behauptung aus Theorem 0.7 (a). $\square$

Diesen Satz kann man dazu benutzen, die Existenz T -periodischer Lösungen auch für Nichtlinearitäten, die selbst keiner asymptotischen Bedingung (AL) genügen, nachzuweisen.

Betrachten wir nämlich z.B. zwei Abbildungen

$$f_i \in C([0, T] \times (-1)^i P_Y, X), \quad i = 1, 2,$$

die den Voraussetzungen von Satz 4.5 genügen, wobei man für f_1 den Kegel P durch $-P$ ersetze, so liefert uns Satz 4.5 zwei T -periodische milde Lösungen $u_i \in (-1)^i C_+([0, T], X_Y)$ zu

$$\dot{u} + A(t)u = f_i(t, u), \quad 0 < t \leq T, \quad i = 1, 2,$$

falls (H1), (H2.1), (K) und (P1) erfüllt sind. Genügt $f \in C([0, T] \times Y, X)$ den Voraussetzungen des Satzes 3.6 ((3.6.1) - (3.6.4)) und ist P normal, so erhalten wir mit $\alpha = \alpha_0 \sigma_0$ für $x \in [u_1(0), u_2(0)]_\alpha$ die Ungleichung

$$u_1(0) = u_1(T) \leq \pi(x) \leq u_2(T) = u_2(0).$$

Nach Satz 4.3 (i) besitzt (E) also eine T -periodische milde Lösung u mit $u(0) \in [u_1(0), u_2(0)]$.

Wie im Anschluß an Satz 3.6 bereits bemerkt, sind die Voraussetzungen an f besonders leicht zu verifizieren, wenn f quasiwachsend in X_{α_0} ist, und man erhält eine *nichtnegative* T -periodische Lösung, falls f die Wahl von $f_1 = 0$ gestattet. Noch einfacher wird das Ergebnis, wenn man *lineare* Abbildungen f_1 und f_2 betrachtet:

4.6 Satz:

Es sei (X, P) ein OBR mit normalem Kegel P , die Voraussetzungen (H1), (H2.1), (K) und (P1) seien erfüllt, und die Abbildung $f \in C([0, T] \times Y, X)$ sei quasiwachsend in X_{α_0} und genüge für jedes $p > 0$ der Lipschitzbedingung (3.6.1) und für ein $\sigma_0 \in [1, 2)$ der Wachstumsbedingung (3.6.2). Ferner seien $g \in C_+([0, T], X)$ und eine in X_{α_0} quasipositive stark stetige Abbildung $G : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ gegeben derart, daß

$$u_G(T, 0)x \neq \lambda x \quad \forall (\lambda, x) \in [1, \infty) \times S_{X_{\alpha_0}}^+$$

und

$$f(t, x) \leq G(t)x + g(t) \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times P_{\alpha_0}$$

gilt. Dann folgt:

- (i) Falls für alle $(t, x) \in [0, T] \times (-P_{\alpha_0})$ die Ungleichung

$$f(t, x) \geq G(t)x - g(t)$$

erfüllt ist, so besitzt (E) mindestens eine T-periodische milde Lösung.

- (ii) Falls $f(., 0) \geq 0$ gilt¹⁾, so besitzt (E) mindestens eine nichtnegative T-periodische milde Lösung.

Beweis:

Satz 4.5 liefert eine T-periodische milde Lösung $u_2 \geq 0$ von

$$\dot{u} + A(t)u = G(t)u + g(t) \quad , \quad 0 < t \leq T \quad .$$

Wählen wir

$$u_1 := \begin{cases} -u_2 & \text{im Falle (i)} \\ 0 & \text{im Falle (ii)} \end{cases} \quad ,$$

so folgt aus Satz 3.6, daß π für $\alpha = \alpha_0 \sigma_0$ das Ordnungsintervall $[u_1(0), u_2(0)]_{\alpha}$ in sich abbildet. Nach Satz 4.3 (i) und Satz 3.6 besitzt (E) mindestens eine T-periodische milde Lösung $u \in [u_1, u_2]$. $\square$

Da die bislang bewiesenen Sätze nicht explizit die Existenz einer *nichttrivialen* T-periodischen milden Lösung von (E) garantieren, enthalten sie praktisch keine Aussage, falls $f(., 0) = 0$ gilt. In diesem Fall hilft jedoch der folgende Satz:

¹⁾ Da f in X_{α_0} quasiwachsend ist, folgt hieraus (P2).

4.7 Satz:

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.5 sei $f(.,0) = 0$ und es existiere eine stark stetige Abbildung $G : [0,T] \rightarrow \mathcal{L}(Y,X)$ mit

$$\lim_{\substack{\|x\|_Y \rightarrow 0 \\ x \in P_Y}} \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{\|f(t,x) - G(t)x\|}{\|x\|_Y} = 0.$$

Ferner gelte

$$U_{\overline{G}}(T,0)x \neq x \quad \forall x \in \mathcal{S}_{X_{\alpha_0}}^+$$

und

$$U_{\overline{G}}(T,0)x_0 = \lambda_0 x_0$$

für irgendein $(\lambda_0, x_0) \in (1, \infty) \times \mathcal{S}^+$. Dann besitzt (E) mindestens eine *positive* T-periodische milde Lösung u mit $u(0) > 0$.

Beweis:

Die Voraussetzungen implizieren, daß $\pi : P_{\alpha_0} \rightarrow P_{\alpha_0}$ vollstetig, asymptotisch linear und rechtsseitig in 0 differenzierbar (vgl. Satz 3.5) ist mit

$$\pi'_+(0) = U_{\overline{G}}(T,0)$$

und

$$\pi'(\infty) = U_{\overline{D}}(T,0).$$

Somit folgt die Behauptung aus Theorem 0.7 (b)(α). □

Aus Theorem 0.7 (b)(β) folgt sofort, daß die Aussage dieses Satzes richtig bleibt, wenn man grob gesprochen die Voraussetzungen über $U_{\overline{D}}(T,0)$ und $U_{\overline{G}}(T,0)$ vertauscht. In einigen unserer Anwendungen (vgl. Lemma 6.6) werden diese beiden Operatoren *stark positiv* in X_{α_0} sein. Da in diesem Fall der Spektralradius der einzige Eigenwert ist, zu dem es einen positiven Eigenvektor gibt (vgl. Theorem 0.4), können wir diese Voraussetzungen durch

$$r(U_D(T,0)) < 1 \quad , \quad r(U_G(T,0)) > 1$$

ersetzen.

Wir wollen nun einen einfachen, aber sehr nützlichen *Nichtexistenz-*
satz für T-periodische milde Lösungen von (E) beweisen, indem wir uns
 die Nichtexistenzaussage von Theorem 0.4 zunutze machen.

4.8 Satz:

Es sei (X,P) ein OBR, und es gelte (H1), (K) und (H2) mit $M = P$.
 Die Abbildung $G : [0,T] \rightarrow \mathcal{L}(Y,X)$ sei stark stetig, und es existiere
 eine Zahl $\alpha \in [\alpha_0, 1)$ derart, daß P_α innere Punkte besitzt und
 die Operatoren $U_G(T, \tau)$ für $0 \leq \tau \leq T$ positiv in X und für $\tau = 0$
 stark positiv in X_α sind. Falls

$$f(t,x) \geq G(t)x \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times P_Y$$

und

$$r(U_G(T,0)) > 1$$

gilt, so besitzt (E) *keine* nichtnegative T-periodische milde Lösung
 u mit $u(0) > 0$.

Beweis:

Nehmen wir an, u wäre eine nichtnegative T-periodische milde Lösung
 mit $x := u(0) > 0$, so erhalten wir nach (1.10), (1.11) und Lemma
 2.9 (ii) die Ungleichung

$$\begin{aligned} x &= U_G(T,0)x + (K_0^G [F(u) - \bar{G}u])(T) \\ &\geq U_G(T,0)x \quad , \end{aligned}$$

aus der nach Theorem 0.4

$$r(U_G(T,0)) \leq 1$$

folgt, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. $\square$

Aus den im Anschluß an Theorem 0.3 geführten Überlegungen ergibt sich, daß dieser Satz richtig bleibt, wenn man in beiden vorausgesetzten Ungleichungen die Zeichen umkehrt. In diesem Fall ist es sogar überflüssig, $U_{\bar{G}}(T,0)$ als stark positiv vorauszusetzen. Wir schließen diesen Paragraphen nun mit einem Stabilitätssatz für T-periodische Lösungen ab.

4.9 Satz:

Es gelte (H) und (L), und es sei $D \in C([0,T] \times \mathbb{M}_Y, \mathcal{L}(Y,X))$ eine Abbildung, die für jede kompakte Teilmenge K von $\mathbb{M}_Y$ der Gleichung

$$\lim_{\rho \rightarrow 0+} \sup_{\substack{(t,x) \in [0,T] \times K \\ y \in \mathbb{M}_Y \cap (x + \rho B_Y) \setminus \{x\}}} \frac{\|f(t,y) - f(t,x) - D(t,x)(y-x)\|}{\|y-x\|_Y} = 0$$

genügt. Ferner gelte $A(T) = A(0)$ und $f(T, \cdot) = f(0, \cdot)$, und für ein $\alpha \in [\alpha_0, 1)$ enthalte M_α eine X_α -Umgebung des stabilen Fixpunktes x_0 von π . Definieren wir schließlich

$$G(t) := D(t, S(x_0)(t)) \quad \forall t \in [0, T],$$

so folgt:

Zu beliebigen Zahlen $\sigma > \omega_0 := \frac{1}{T} \ln r(U_{\bar{G}}(T,0))^{(1)}$ und $\beta \in [0, \alpha]$ gibt es positive Konstanten $c(\sigma, \beta)$ und $\delta(\sigma, \beta)$, so daß die milden Lösungen von CP(x) für alle $x \in x_0 + \delta B_{X_\alpha}$ auf ganz $\mathbb{R}_+$ existieren mit

$$\| [S(x) - S(x_0)](t) \|_{X_\alpha} \leq c t^{\beta - \alpha} e^{\sigma t} \|x - x_0\|_{X_\beta} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Beweis:

Nach Satz 3.1 (i) und Satz 3.5 ist π in x_0 differenzierbar mit

$$\pi'(x_0) = U_{\bar{G}}(T, 0).$$

Da x_0 stabil ist, ist ω_0 negativ, und trivialerweise genügt es, die Behauptung für $\sigma \in (\omega_0, 0]$ zu beweisen.

Zu einem solchen σ wählen wir $\sigma_1 \in (\omega_0, \sigma)$ mit

1) Vgl. Lemma 1.13

$$\omega_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma \quad .$$

Nach Lemma 1.13 (iii) gibt es eine Konstante $c_0(\sigma) \geq 1$ derart, daß

$$(4.9.1) \quad \|U_{\overline{G}}(t, 0)\|_{\mathcal{L}(X_\alpha)} \leq c_0 e^{\sigma_1 t} \quad \forall t \geq 0$$

gilt. Wählen wir nun zu $\beta \in [0, \alpha]$ eine Zahl $n_0(\sigma, \beta) \in \mathbb{N}^*$ so groß, daß

$$(4.9.2) \quad n_0 \geq \frac{\ln c_0}{T(\sigma_2 - \sigma_1)}$$

und

$$(4.9.3) \quad (\alpha - \beta) \frac{\ln t}{t} \leq \sigma - \sigma_3 \quad \forall t \geq n_0 T$$

gilt, so folgt aus (4.9.1) und (4.9.2) die Ungleichung

$$\|U_{\overline{G}}(n_0 T, 0)\|_{\mathcal{L}(X_\alpha)} \leq e^{\sigma_2 n_0 T} .$$

Da sich A und f bezüglich t kanonisch zu T -periodischen Abbildungen

$$A \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{L}(X_1, X)) , \quad f \in C(\mathbb{R}_+ \times M_Y, X)$$

fortsetzen lassen, können wir in den Sätzen 3.1 bis 3.5 die Zahl T durch $n_0 T$ ersetzen. Somit gibt es nach Satz 3.1 eine Zahl

$\delta(\sigma, \beta) > 0$ derart, daß S als Abbildung von

$$W := x_0 + \delta \, \text{IB}_{X_\alpha} \subset M_\alpha$$

nach $C([0, n_0 T], X_\alpha)$ definiert ist und $(AP)_W$ für auf $[0, n_0 T]$

erklärte milde X_α -Lösungen gilt. Aus Satz 3.5 folgt, daß

$\pi^{n_0} = S(\cdot)(n_0 T)$ als Abbildung von W nach X_α stetig differenzierbar ist. Indem wir δ erforderlichenfalls verkleinern, können wir also annehmen, daß

$$\|(\pi^{n_0})'(x)\|_{\mathcal{L}(X_\alpha)} \leq e^{\sigma_3 n_0 T} \quad \forall x \in W$$

gilt, so daß wir nach dem Mittelwertsatz

$$(4.9.4) \quad \|\pi^{n_0}(x) - x_0\|_{X_\alpha} \leq e^{\sigma_3 n_0 T} \|x - x_0\|_{X_\alpha} \quad \forall x \in W$$

erhalten. Wir setzen nun gemäß Satz 3.1 (ii) für $\gamma \in [0, \alpha]$

$$c(\gamma) := \sup_{\substack{0 \leq t \leq n_0 T \\ x \in W \setminus \{x_0\}}} \frac{t^{\alpha-\gamma} \| [S(x) - S(x_0)](t) \|_{X_\alpha}}{\| x - x_0 \|_{X_\gamma}}$$

und

$$c(\sigma, \beta) := c(\beta) e^{-\omega_0 n_0 T} \max \{1, c(\alpha) (n_0 T)^{\beta-\alpha} e^{-\omega_0 n_0 T}\}$$

und wählen $x \in W$ beliebig.

Für $t \in [0, n_0 T]$ folgt die Abschätzung

$$(4.9.5) \quad \begin{aligned} & \| [S(x) - S(x_0)](t) \|_{X_\alpha} \\ & \leq c(\beta) t^{\beta-\alpha} \| x - x_0 \|_{X_\beta} \leq c(\sigma, \beta) t^{\beta-\alpha} e^{\sigma t} \| x - x_0 \|_{X_\beta}. \end{aligned}$$

Da π_{n_0} wegen (4.9.4) eine Kontraktion auf W ist, können wir $S(x)$ induktiv auf ganz $\mathbb{R}_+$ fortsetzen, und aus der Periodizität von f folgt mit iterierter Anwendung von Lemma 1.13 (i) für $t \geq n_0 T$ und

$$k := \left\lceil \frac{t}{n_0 T} \right\rceil \text{ die Gleichung} \\ S(x)(t) = S(\pi_{kn_0}(x))(t - kn_0 T),$$

mit deren Hilfe wir unter Ausnutzung von (4.9.5), (4.9.4) und (4.9.3)

für $t \geq n_0 T$ zur Abschätzung

$$\begin{aligned} & \| [S(x) - S(x_0)](t) \|_{X_\alpha} \\ & \leq c(\alpha) \| \pi_{kn_0}(x) - x_0 \|_{X_\alpha} \\ & \leq c(\alpha) e^{\sigma_3 (k-1) n_0 T} \| \pi_{n_0}(x) - x_0 \|_{X_\alpha} \\ & \leq c(\alpha) c(\beta) (n_0 T)^{\beta-\alpha} e^{-2\omega_0 n_0 T} e^{\sigma_3 (k+1) n_0 T} \| x - x_0 \|_{X_\beta} \\ & \leq c(\sigma, \beta) e^{\sigma_3 t} \| x - x_0 \|_{X_\beta} \\ & \leq c(\sigma, \beta) t^{\beta-\alpha} e^{\sigma t} \| x - x_0 \|_{X_\beta} \end{aligned}$$

gelangen. Zusammen mit (4.9.5) liefert sie die Behauptung. $\square$

4.10 Bemerkungen:

- (i) Die in Satz 4.3 (ii), (iii) angegebenen Resultate sind einfache Varianten bekannter Sätze über wachsende Abbildungen (vgl. [6 , Prop. 4.3, Lemma 4.6] und [7 , Theorem 6.1, Prop. 7.8]).
- (ii) Für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen bewies M. A. Krasnosel'skii bereits in [34, Theorem 3.4] eine zu Satz 4.4 analoge Aussage, während er in [32, 23.9] darauf hinwies, daß dieses Ergebnis auf Evolutionsgleichungen unseres Typs übertragen werden kann.
- (iii) Satz 4.6 kann als eine Verallgemeinerung der in [34, Theorem 4.8] , [31, Theorem 8] und [10, Theorem 1.3, Corollary 1.4] enthaltenen Aussagen angesehen werden, während in Satz 4.7 eine ähnliche Idee wie in [34, Theorem 4.17] und [31, Theorem 9] zugrundeliegt. In den zitierten Arbeiten wurden lineare Majoranten bzw. Minoranten benutzt.
- (iv) Der Stabilitätssatz 4.9 ist mit einem Ergebnis von J. Rauch verwandt, der in [49, Theorem 11] für autonome Evolutionsgleichungen (d.h. A und f von t unabhängig), bei denen die Nichtlinearität eine stetige Selbstabbildung von $D(A)$ ist, eine ähnliche Aussage bewies, ohne allerdings ω_0 explizit anzugeben. Mit Hilfe einer anderen Beweistechnik bewies auch H. Amann in [8 , Theorem 4.3] implizit ein ähnliches Resultat für stationäre Lösungen einer autonomen Evolutionsgleichung, wobei er unsere Voraussetzungen an die Ableitung von π in x_0 durch die Forderung ersetze, daß die Nichtlinearität global Lipschitzstetig ist mit hinreichend kleiner Lipschitzkonstante. Eine entsprechende globale Bedingung wurde bereits in [55] zum Beweis einer einfacheren Stabilitätsaussage benutzt (vgl. auch [20, Chap VII, Theorem 2.1]).

§ 5. Ergebnisse über Kontinua nichtnegativer T-periodischer Lösungen

Wir wollen nun in einem OBR (X, P) weitere Existenzsätze über nichtnegative T-periodische milde Lösungen beweisen, wobei wir jetzt Nichtlinearitäten betrachten werden, die von einem reellen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}_+$ abhängen. Dementsprechend vereinbaren wir für den gesamten folgenden Paragraphen $M = P$, $Z = \mathbb{R}$ und $\Lambda = \mathbb{R}_+$. Wir werden versuchen, die Frage zu beantworten, für welche Parameter die Gleichung $(E\lambda)$ gar keine, mindestens eine oder mindestens zwei nichtnegative T-periodische milde Lösungen besitzt. Zu diesem Zweck formulieren wir zunächst die folgende Voraussetzung:

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Es sei } (X, P) \text{ ein OBR, und es gelte (H1), (H2),} \\ (P_1), (P_2), (L) \text{ und (G).} \end{array} \right.$$

Aus Lemma 2.8 und den nach Lemma 3.3 und vor Definition 4.2 geführten Überlegungen ergibt sich, daß die Operatoren S und π unter der Voraussetzung (P) für $\alpha = \alpha_0 \sigma_0$ als Abbildungen

$$\begin{aligned} S &\in C(P_\alpha \times \mathbb{R}_+, C_+[0, T], X_\alpha) \\ \pi &\in C(P_\alpha \times \mathbb{R}_+, P_\alpha) \end{aligned}$$

aufgefaßt werden können. Neben der Lösungsmenge

$$\Sigma := \{(u, \lambda) \in C_+[0, T], X_\alpha \times \mathbb{R}_+ / u \text{ ist T-periodische milde Lösung von } (E\lambda)\}$$

betrachten wir die dazu homöomorphe Fixpunktmenge

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &:= \{(x, \lambda) \in P_\alpha \times \mathbb{R}_+ / \pi(x, \lambda) = x\} \\ &= \{(u(0), \lambda) / (u, \lambda) \in \Sigma\} \end{aligned}$$

um die Resultate aus § 0. Über die globale Struktur derartiger Fixpunkt-mengen anwenden zu können.

5.1 Satz:

Es seien (P) und (K) erfüllt. Dann gilt:

- (i) π ist vollstetig und bildet $X \times \mathbb{R}$ -beschränkte Teilmengen von $P_\alpha \times \mathbb{R}_+$ auf relativ kompakte Teilmengen von P_α ab.
- (ii) Falls $\pi(\cdot, 0)$ asymptotisch linear ist mit

$$(5.1.1.) \quad \begin{cases} D_1 \pi(\infty, 0) \neq \lambda x & \forall (\lambda, x) \in [1, \infty) \times S_{X_\alpha}^+ \\ [\text{id} - \pi(\cdot, 0)]^{-1}(\{0\}) = \{0\} \end{cases},$$

so ist die Zusammenhangskomponente C_0 von $(0, 0)$ in Σ_0 eine $X \times \mathbb{R}$ -unbeschränkte Menge (mit nichtleerer Projektion auf $(0, \infty)$).

Beweis:

- (i) Wählen wir $\beta \in (\alpha, 1)$, so bildet π gemäß Lemma 3.3 jede $X \times \mathbb{R}$ -beschränkte Teilmenge von $P_\alpha \times \mathbb{R}_+$ beschränkt nach X_β und somit nach Lemma 1.1 auf eine relativ kompakte Teilmenge von X_α ab.
- (ii) Wäre C_0 in $X \times \mathbb{R}$ beschränkt, so gäbe es nach Lemma 3.3 eine Konstante $c > 0$ derart, daß für alle $(x, \lambda) \in C_0$ die Ungleichung

$$\|x\|_{X_\alpha} \leq c T^{-\alpha} (\|x\| + 1)$$

erfüllt wäre, die impliziert, daß C_0 auch in $X_\alpha \times \mathbb{R}$ beschränkt ist. Dies widerspricht jedoch Theorem 0.9. $\square$

Offensichtlich ist nach Lemma 3.3 die Behauptung in (ii) genau dann erfüllt, wenn die Zusammenhangskomponente

$$C = \{(S(x, \lambda), \lambda) / (x, \lambda) \in C_0\}$$

von $(0, 0)$ in Σ eine $C([0, T], X_\alpha) \times \mathbb{R}$ -unbeschränkte Menge ist. Man beachte ferner, daß (5.1.1) bereits erfüllt ist, wenn $\pi(\cdot, 0)$ linear

ist mit $r(\pi(.,0)) < 1$. Eine besonders einfache Situation dieser Art betrachten wir im folgenden Korollar:

5.2 Korollar:

Falls (P) und (K) erfüllt sind mit $f(.,.,0) = 0$ und $r(U(T,0)) < 1$, so gilt die Behauptung von Satz 5.1 (ii).

Beweis:

Wegen $F(.,0) = 0$ gilt

$$\pi(.,0) = U(T,0) = D_1\pi(\infty,0) .$$

Da $r(U(T,0)) < 1$ ist, besitzt die Gleichung

$$U(T,0)x = \lambda x$$

für $\lambda \geq 1$ in P_α nur die triviale Lösung.

□

Im folgenden werden wir unter den Voraussetzungen (P) und

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \text{Der Kegel } P_Y \text{ sei erzeugend in } Y, \text{ und } f \text{ besitze} \\ \text{rechtsseitige partielle Ableitungen nach } x \text{ und } \lambda, \\ \text{für die} \\ D_2^+ f \in C([0,T] \times P_Y \times \mathbb{R}_+, \mathcal{L}(Y,X)) \\ \text{und} \\ D_3^+ f \in C([0,T] \times P_Y \times \mathbb{R}_+, X) \\ \text{gilt.} \end{array} \right.$$

die Buchstaben G und g für die durch

$$G(t,x,\lambda) := D_2^+ f(t, S(x,\lambda)(t), \lambda)$$

und

$$g(t,x,\lambda) := D_3^+ f(t, S(x,\lambda)(t), \lambda)$$

auf $[0,T] \times P_\alpha \times \mathbb{R}_+$ definierten Abbildungen reservieren.

5.3 Lemma:

Falls (P) und (D) erfüllt sind, ist π in $P_\alpha \times \mathbb{R}_+$ stetig rechtsseitig differenzierbar mit

$$\pi'(x, \lambda) = (U_{\overline{G}}(x, \lambda)(T, 0), [K_0^{\overline{G}}(x, \lambda)g(\cdot, x, \lambda)](T)) \quad .$$

Beweis:

Da sich $P_\alpha \times \mathbb{R}_+$ nach Lemma 3.3 als Vereinigung rechtsseitig offener Mengen W , für die $(AP)_W$ erfüllt ist, darstellen läßt, sind gemäß Satz 3.5 (ii) für jedes $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ und jede kompakte Teilmenge K von P_Y die Voraussetzungen (3.2.1) und (3.2.2) mit

$$D_i(t, x, \lambda_0) := D_{i+1}^+ f(t, x, \lambda_0) \quad , \quad i = 1, 2 \quad ,$$

nachzuweisen. Da P_Y eine offene Zerlegung von Y liefert (vgl. § 0.),

gibt es eine Zahl $\rho > 0$ mit $\rho \overline{IB}_Y \subset \overline{IB}_Y^+ - \overline{IB}_Y^+$. Zu vorgegebenem

$\varepsilon > 0$ garantiert nun (D) die Existenz einer Zahl $\delta(\varepsilon, K) > 0$ derart,

daß für alle $(t, x) \in [0, T] \times K$ und $(y, \lambda) \in (P_Y \times \mathbb{R}_+)$ mit

$$\|y - x\|_Y \leq \delta \quad \text{und} \quad |\lambda - \lambda_0| \leq \delta \quad \text{die Ungleichungen}$$

$$(5.3.1) \quad \|D_2^+ f(t, y, \lambda) - D_2^+ f(t, x, \lambda_0)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \leq \frac{\rho \varepsilon}{2}$$

und

$$(5.3.2) \quad \|D_3^+ f(t, y, \lambda) - D_3^+ f(t, x, \lambda_0)\| \leq \varepsilon$$

erfüllt sind. Wählen wir nun $x \in K$ und $y \in P_Y \cap (x + \frac{\delta \rho}{\rho+1} \overline{IB}_Y)$, so gibt

es Vektoren $h_1 \in P_Y$ mit

$$y - x = h_1 - h_2 \quad , \quad \|h_1\|_Y \leq \frac{1}{\rho} \|y - x\|_Y \quad ,$$

und nach dem Mittelwertsatz gilt wegen (5.3.1) für $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} & \|f(t, y, \lambda_0) - f(t, x, \lambda_0) - D_2^+ f(t, x, \lambda_0)(y - x)\| \\ & \leq \|f(t, y, \lambda_0) - f(t, y + h_2, \lambda_0) + D_2^+ f(t, x, \lambda_0)h_2\| \\ & \quad + \|f(t, x + h_1, \lambda_0) - f(t, x, \lambda_0) - D_2^+ f(t, x, \lambda_0)h_1\| \\ & \leq \frac{\rho \varepsilon}{2} (\|h_2\|_Y + \|h_1\|_Y) \leq \varepsilon \|y - x\|_Y \quad , \end{aligned}$$

womit (3.2.1) nachgewiesen ist. Zum Nachweis von (3.2.2) wählen wir $x \in K$ und $(y, \lambda) \in (P_Y \times \mathbb{R}_+) \cap ((x, \lambda_0) + \delta \overline{B}_{Y \times \mathbb{R}})$ und schätzen unmittelbar nach dem Mittelwertsatz mit (5.3.2)

$$\|f(t, y, \lambda) - f(t, y, \lambda_0) - D_3 f(t, x, \lambda_0)(\lambda - \lambda_0)\| \leq \varepsilon |\lambda - \lambda_0| \quad \forall t \in [0, T]$$

ab. □

Die nachfolgende Bedingung garantiert unter der Voraussetzung (P), daß π in $P_\alpha \times \mathbb{R}_+$ wachsend ist.

$$(W) \left\{ \begin{array}{l} \text{Es sei (D) erfüllt, und für } (x, \lambda) \in P_\alpha \times \mathbb{R}_+ \text{ gelte} \\ \quad U_{\overline{G}(x, \lambda)}(t, \tau) \in \mathcal{L}^+(X) \quad \forall 0 \leq \tau \leq t \leq T \\ \text{und} \\ \quad g(t, x, \lambda) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T] \end{array} \right.$$

5.4 Lemma:

Unter den Voraussetzungen (P) und (W) sind die Abbildungen S und π wachsend.

Beweis:

folgt sofort aus Lemma 5.3, Theorem 0.5 (iii) und Lemma 2.9 (ii). □

Setzen wir unter der Voraussetzung (P)

$$\Gamma := \{\lambda \in \mathbb{R}_+ / (E\lambda) \text{ besitzt mindestens eine nichtnegative } T\text{-periodische milde Lösung}\}$$

und $\lambda^* := \sup \Gamma$, so können wir den folgenden Satz beweisen.

5.5 Satz:

Es gelte (P), (W) und (K), wobei P normal und $u = S(0, 0)$ T -periodisch sei. Falls ferner λ^* positiv ist, so gilt:

- (i) $\Gamma \setminus \{\lambda^*\} = [0, \lambda^*)$.
- (ii) Zu jedem $\lambda \in \Gamma$ besitzt $\pi(\cdot, \lambda)$ einen bezüglich P_Y minimalen Fixpunkt $\underline{x}(\lambda)$ und $(E\lambda)$ eine bezüglich $C_+[0, T], Y$ minimale nichtnegative T-periodische milde Lösung $\underline{u}(\lambda) = S(\underline{x}(\lambda), \lambda)$.
- (iii) Die Abbildungen

$$\underline{x} : \Gamma \rightarrow P_\alpha$$

und

$$\underline{u} : \Gamma \rightarrow C_+[0, T], X_\alpha$$

sind wachsend und linksseitig stetig.

- (iv) Falls λ^* endlich ist, so ist λ^* genau dann in Γ enthalten, wenn $\underline{x}([0, \lambda^*))$ in X beschränkt ist. In diesem Fall ist $\underline{u}([0, \lambda^*))$ relativ kompakt in $C([0, T], X_\alpha)$, und

$$u_{\lambda^*} := \lim_{\lambda \uparrow \lambda^*} \underline{u}(\lambda)$$

ist eine minimale nichtnegative T-periodische milde Lösung von $(E\lambda^*)$.

Beweis:

- (i) Zu $\lambda \in [0, \lambda^*)$ gibt es $(\gamma, \mu) \in \Sigma_0$ mit $\mu \in (\lambda, \lambda^*]$. Da π nichtnegativ und wachsend ist, genügen $\pi(\cdot, \lambda)$ und $\mathbb{E} := [0, \gamma]$ den Voraussetzungen des Satzes 4.3, aus dessen Teil (i) wir folgern können, daß $\lambda \in \Gamma$ ist. Somit ist $[0, \lambda^*)$ eine Teilmenge von $\Gamma \setminus \{\lambda^*\}$. Die umgekehrte Inklusion gilt trivialerweise.
- (ii) Aus Teil (ii) des Satzes 4.3 können wir folgern, daß $\pi(\cdot, \lambda)$ für $\lambda \in \Gamma$ einen bzgl. P_Y minimalen Fixpunkt
- $$\underline{x}(\lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi(\cdot, \lambda)^k(0)$$
- besitzt, und daß $\underline{u}(\lambda) = S(\underline{x}(\lambda), \lambda)$ die bzgl. $C_+[0, T], Y$ minimale T-periodische milde Lösung von $(E\lambda)$ ist.

- (iii) Für $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \in \Gamma$ genügen $\pi(\cdot, \lambda_1)$ und $\mathbb{E} := [0, \underline{x}(\lambda_2)]$ den Voraussetzungen des Satzes 4.3, und wir erhalten die Ungleichungen

$$0 \leq \underline{x}(\lambda_1) \leq \underline{x}(\lambda_2) \quad , \quad 0 \leq \underline{u}(\lambda_1) \leq \underline{u}(\lambda_2) \quad .$$

Zum Nachweis, daß $\underline{x}$ und $\underline{u}$ linksseitig stetig sind, betrachten wir $\lambda \in \Gamma \setminus \{0\}$. Da P normal ist, ist

$$\{(\underline{x}(\sigma), \sigma) \mid 0 \leq \sigma < \lambda\} \subset [0, \underline{x}(\lambda)] \times [0, \lambda]$$

in $X \times \mathbb{R}$ beschränkt, woraus wir nach Satz 5.1 (i) schließen können, daß $\underline{x}([0, \lambda))$ in X_α relativ kompakt ist. Für $\sigma + \lambda$ konvergieren die $\underline{x}(\sigma)$ somit in X_α monoton wachsend gegen einen eindeutig bestimmten Grenzwert $x_\lambda \in P_\alpha$, und wegen

$$\underline{x}(\sigma) \leq \underline{x}(\lambda) \quad \forall \sigma \in [0, \lambda]$$

folgt $x_\lambda \leq \underline{x}(\lambda)$. Aufgrund der Stetigkeit von π ist x_λ ein Fixpunkt von $\pi(\cdot, \lambda)$, so daß wegen der Minimalität von $\underline{x}(\lambda)$ sogar $x_\lambda = \underline{x}(\lambda)$ gelten muß. Folglich ist $\underline{x}$ linksseitig stetig. Die linksseitige Stetigkeit von $\underline{u}$ erhält man nun aus der von $\underline{x}$ und der Stetigkeit von S .

- (iv) Falls $\lambda^* < \infty$ und $\underline{x}([0, \lambda^*))$ in X beschränkt ist, so zeigt man wie in (iii), daß $\underline{x}(\lambda)$ für $\sigma + \lambda^*$ gegen einen Fixpunkt von $\pi(\cdot, \lambda^*)$ konvergiert, so daß $\lambda^* \in \Gamma$ ist. Ist umgekehrt $\lambda^* \in \Gamma$, so muß $\underline{x}([0, \lambda^*)) \subset [0, \underline{x}(\lambda^*)]$ beschränkt in X sein, da P normal ist. Setzen wir voraus, daß $\underline{x}([0, \lambda^*))$ in X beschränkt ist, so folgt nach Satz 5.1 (i), daß $\underline{x}([0, \lambda^*))$ in X_α relativ kompakt ist, und wir können aus Satz 3.1 (ii)(b) schließen, daß $\underline{u}([0, \lambda^*))$ in $C([0, T], X_\alpha)$ relativ kompakt ist.

□

Im folgenden Satz wollen wir eine besonders einfache Situation beschreiben, in der wir die Voraussetzungen von Satz 5.5 antreffen.

5.6 Satz:

Es sei (X, P) ein OBR, und es gelte (H2.1). Der Kegel P sei normal, während P_Y (in Y) erzeugend sei. Ferner setzen wir (H1), (K) und (P1) voraus und betrachten eine in X_{α_0} quasipositive stark stetige Abbildung $D_0 : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$, für die $r(U_{D_0}(T, 0)) < 1$ gilt. Die in P_{α_0} quasiwachsende Abbildung $f_0 \in C_+([0, T] \times P_Y, X)$ genüge der Bedingung (G) und besitze eine rechtsseitige partielle Ableitung

$$D_2^+ f_0 \in C([0, T] \times P_Y, \mathcal{L}(Y, X))$$

derart, daß für alle $\rho > 0$

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times \rho \overline{B}_Y} \|D_2^+ f_0(t,x)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} < \infty$$

gilt.

Betrachten wir (E λ) mit $f(t, x, \lambda) = D_0(t)x + \lambda f_0(t, x)$, so ist $\lambda^* \in (0, \infty]$, es gelten die Behauptungen (i)-(iv) des Satzes 5.5, und die Zusammenhangskomponente C_0 von $(0, 0)$ in Σ_0 ist $X \times \mathbb{R}$ -unbeschränkt.

Beweis:

Mit einer ähnlichen Überlegung wie im Beweis von Lemma 5.3 zeigt man mit Hilfe des Mittelwertsatzes, daß die Abschätzung an $D_2^+ f_0$ die Bedingung (L) zur Folge hat, so daß wegen (P1), (G) und der Positivitätsvoraussetzung an f die Bedingung (P) erfüllt ist. Wegen $\pi(\cdot, 0) = U_{D_0}(T, 0)$ ist nach Satz 5.1 C_0 in $X \times \mathbb{R}$ unbeschränkt und λ^* positiv. Da $D_2^+ f_0(t, x)$ nach Theorem 0.5 (iii) für alle $(t, x) \in [0, T] \times P_{\alpha_0}$ quasipositiv in X_{α_0} ist, folgt aus Lemma 2.9 (i), daß auch (W) erfüllt ist. Somit sind die Voraussetzungen des Satzes 5.5 nachgewiesen. $\square$

Wir wollen nun unter der Voraussetzung (P) die folgende Verschärfung der Bedingung (W) untersuchen

$$(SW) \left\{ \begin{array}{l} \text{Der Kegel } P_\alpha \text{ besitze (in } X_\alpha) \text{ innere Punkte, es gelte (D), für} \\ (x, \lambda) \in P_\alpha \times \mathbb{R}_+^* \text{ seien die Operatoren } U_{\bar{G}(x, \lambda)}(t, \tau), 0 \leq \tau < t \leq T, \\ \text{stark positiv von } X \text{ nach } X_\alpha, \text{ und es sei } g(\cdot, x, \lambda) > 0. \end{array} \right.$$

Analog zu Lemma 5.4 gilt nun die folgende Aussage:

5.7 Lemma:

Sind (P) und (SW) erfüllt, so ist π stark wachsend in $P_\alpha \times \mathbb{R}_+^*$ und $S(\cdot, \lambda)(t)$ für jedes $(\lambda, t) \in \mathbb{R}_+^* \times (0, T]$ stark wachsend in P_α .

Beweis:

Da man wie im Beweis von Lemma 5.3 zeigen kann, daß $S(\cdot, \lambda)(t)$ für $(\lambda, t) \in \mathbb{R}_+^* \times (0, T]$ stetig rechtsseitig differenzierbar in P_α ist mit

$$D_1^+ S(x, \lambda)(t) = U_{\overline{G}(x, \lambda)}(t, 0) \quad \forall x \in P_\alpha,$$

folgen die Behauptungen aus Lemma 5.3, Lemma 2.9 (ii) und Theorem 0.5 (iii). $\square$

Da π unter den Voraussetzungen von Lemma 5.7 gemäß Theorem 0.5 (ii) in $(x, \lambda) \in P_\alpha^0 \times \mathbb{R}_+^*$ sogar stetig Fréchet-differenzierbar ist, lassen wir im folgenden das " + " -Zeichen bei den partiellen Ableitungen in diesem Fall fort.

5.8 Lemma:

Falls (P), (K) und (SW) erfüllt sind, wobei P normal, $u = S(0, 0)$ T-periodisch und $\lambda^* \in (0, \infty]$ vorausgesetzt sei, so folgt:

(i) Die Abbildungen

$$\underline{x} : \Gamma \rightarrow P_\alpha$$

und

$$\underline{u} : \Gamma \rightarrow C_+[0, T], X_\alpha)$$

sind stark wachsend.

(ii) Für $\lambda \in \Gamma \setminus \{0\}$ ist $\underline{x}(\lambda)$ schwach stabil.

(iii) Falls $\lambda^* \in \Gamma$ ist, so gilt

$$r(D_1 \pi(\underline{x}(\lambda^*), \lambda^*)) = 1 \quad .$$

(iv) Falls für ein $(x_0, \lambda_0) \in \Sigma_0 \cap (\overset{0}{P}_\alpha \times \mathbb{R}_+^*)$

$$r(D_1 \pi(x_0, \lambda_0)) = 1$$

gilt, so gibt es ein offenes Intervall $I_0 \subset \mathbb{R}_+^*$ und eine in X_α offene Teilmenge U_0 von $\overset{0}{P}_\alpha$ mit $(x_0, \lambda_0) \in U_0 \times I_0$, eine Zahl $\varepsilon > 0$, eine stark wachsende Abbildung $\tilde{x} \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), U_0)$ und eine Funktion $\tilde{\lambda} \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), I_0)$ derart, daß $\Sigma_0 \cap (U_0 \times I_0)$ eine eindimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit mit der Parameterdarstellung

$$\Sigma_0 \cap (U_0 \times I_0) : (\tilde{x}, \tilde{\lambda})(\sigma), \quad -\varepsilon < \sigma < \varepsilon \quad ,$$

ist. Dabei gilt $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})(0) = (x_0, \lambda_0)$ und

$$\text{sign } \tilde{\lambda}'(\sigma) = \text{sign} [1 - r(D_1 \pi(\tilde{x}(\sigma), \tilde{\lambda}(\sigma)))] \quad \forall \sigma \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad .$$

Beweis:

(i) Für $\lambda_1 \in I$ mit $\lambda_1 < \lambda_2$ gilt nach Satz 5.5 (iii) die Ungleichung $\underline{x}(\lambda_1) \leq \underline{x}(\lambda_2)$. Da π in $\overset{0}{P}_\alpha \times \mathbb{R}_+^*$ stark wachsend ist, erhalten wir für $\mu \in (\lambda_1, \lambda_2)$ die Ungleichung

$$\underline{x}(\lambda_1) = \pi(\underline{x}(\lambda_1), \lambda_1) \leq \pi(\underline{x}(\lambda_1), \mu) << \pi(\underline{x}(\lambda_2), \lambda_2) = \underline{x}(\lambda_2) \quad ,$$

aus der wir starkes Wachstum von $\underline{x}$ folgern können. Für $t \in (0, T]$ gilt außerdem nach Lemma 5.4 und Lemma 5.7

$$\underline{u}(\lambda_1)(t) = S(\underline{x}(\lambda_1), \lambda_1)(t) \leq S(\underline{x}(\lambda_1), \lambda_2)(t) << S(\underline{x}(\lambda_2), \lambda_2)(t) = \underline{u}(\lambda_2)(t) \quad ,$$

so daß wir $\underline{u}(\lambda_1) << \underline{u}(\lambda_2)$ erhalten.

(ii) folgt aus Satz 4.3

(iii) Wäre die erste partielle Ableitung von

$$\psi(x, \lambda) = x - \pi(x, \lambda) \quad , \quad (x, \lambda) \in \overset{0}{P}_\alpha \times \mathbb{R}_+^* \quad ,$$

an der Stelle $(\underline{x}(\lambda^*), \lambda^*)$ in $\mathcal{L}(X_\alpha)$ invertierbar, so ließe sich Σ_0 in einer vollen $X_\alpha \times \mathbb{R}$ -Umgebung von $(\underline{x}(\lambda^*), \lambda^*)$ durch λ parametrisieren, was der Maximalität von λ^* widerspräche. Somit ist $r(D_1 \pi(\underline{x}(\lambda^*), \lambda^*)) \geq 1$, und die Behauptung folgt aus (ii).

(iv) Da $D_1 \pi(x_0, \lambda_0)$ wegen (SW) stark positiv ist, folgt mit (K) aus Theorem 0.5 (i) und Theorem 0.4, daß zu der im Beweis von (iii) definierten Abbildung ψ ein Vektor $x_0 \in P_\alpha \setminus \{0\}$ und ein Funktional $x'_0 \in (P_\alpha)^* \setminus \{0\}$ mit

$$\ker D_1 \psi(x_0, \lambda_0) = \text{span } x_0$$

und

$$D_1 \psi(x_0, \lambda_0)(X) = \ker x'_0$$

existieren. Wegen $D_2 \psi(x_0, \lambda_0) = -D_2 \pi(x_0, \lambda_0) \in -P_\alpha^0$ liegt $D_2 \psi(x_0, \lambda_0)$ nicht in $D_1 \psi(x_0, \lambda_0)(X)$, und wir können Theorem 0.10 anwenden, aus dem bereits alle Behauptungen bis auf die Aussage über das Vorzeichen von $\tilde{\lambda}'(\sigma)$ folgen. Differenzieren wir die Gleichung

$$\tilde{x}(\sigma) = \pi(\tilde{x}(\sigma), \tilde{\lambda}(\sigma)), \quad -\epsilon < \sigma < \epsilon,$$

nach σ und wenden das gemäß Theorem 0.4 (bis auf einen positiven Faktor eindeutig bestimmte) strikt positive Eigenfunktional ϕ_σ von $D_1 \pi(\tilde{x}(\sigma), \tilde{\lambda}(\sigma))$ zum Eigenwert $r(D_1 \pi(\tilde{x}(\sigma), \tilde{\lambda}(\sigma)))$ an, so erhalten wir für alle $\sigma \in (-\epsilon, \epsilon)$ die Identität

$$\langle \phi_\sigma, \tilde{x}'(\sigma) \rangle = r(D_1 \pi(\tilde{x}(\sigma), \tilde{\lambda}(\sigma))) \langle \phi_\sigma, \tilde{x}'(\sigma) \rangle + \tilde{\lambda}'(\sigma) \langle \phi_\sigma, D_2 \pi(\tilde{x}(\sigma), \tilde{\lambda}(\sigma)) \rangle,$$

aus der wegen

$$\langle \phi_\sigma, \tilde{x}'(\sigma) \rangle > 0, \quad \langle \phi_\sigma, D_2 \pi(\tilde{x}(\sigma), \tilde{\lambda}(\sigma)) \rangle > 0$$

die Behauptung über das Vorzeichen von $\tilde{\lambda}'(\sigma)$ folgt. $\square$

Wie zu Anfang dieses Paragraphen angekündigt, wollen wir die (Mindest-) Anzahl der T-periodischen milden Lösungen der Gleichung $(E\lambda)$ in Abhängigkeit vom Parameter λ untersuchen. Wenn π stark wachsend ist, ist $S(0, \lambda)$ für $\lambda > 0$ nicht T-periodisch. Suchen wir also mindestens zwei T-periodische milde Lösungen von $(E\lambda)$, so müssen wir nachweisen, daß $\pi(\cdot, \lambda)$ außer $\underline{x}(\lambda)$ mindestens einen weiteren nichttrivialen Fixpunkt besitzt.

Ist $\lambda_0 \in (0, \lambda^*)$ eine Unstetigkeitsstelle von $\underline{x}$, so zeigt man ähnlich wie im Beweis von Satz 5.5 (iii), daß

$$x_{\lambda_0} := \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \underline{x}(\lambda) > \underline{x}(\lambda_0)$$

ein zweiter Fixpunkt von $\pi(\cdot, \lambda_0)$ ist. Zu untersuchen sind somit lediglich Stetigkeitsstellen $\lambda_0 \in \Gamma$ von $\underline{x}$, wobei man sich natürlich auf solche beschränken kann, für die $\underline{x}(\lambda_0)$ ein isolierter Fixpunkt von $\pi(\cdot, \lambda_0)$ ist.

Unter den Voraussetzungen (P) und (K) ist für $\lambda \in \mathbb{R}_+$ und beschränkte, relativ offene Teilmengen U von P_α , auf deren Rand $\pi(\cdot, \lambda)$ keinen Fixpunkt besitzt, der Fixpunktindex $i(\pi(\cdot, \lambda), U)$ erklärt, bezüglich dessen Definition und Eigenschaften wir auf [7, § 11] verweisen.

5.9 Lemma:

Unter den Voraussetzungen von Lemma 5.8 sei $\lambda_0 \in (0, \lambda^*)$ eine Stetigkeitsstelle von $\underline{x}$ derart, daß $\underline{x}(\lambda_0)$ im Abschluß einer offenen beschränkten X_α -Umgebung $U \subset P_\alpha^\circ$ von $\underline{x}(\lambda_0)$ der einzige Fixpunkt von $\pi(\cdot, \lambda_0)$ ist. Dann gilt

$$i(\pi(\cdot, \lambda_0), U) = 1.$$

Beweis:

Falls $\underline{x}(\lambda_0)$ stabil ist, so folgt nach einem klassischen Satz von Leray-Schauder (vgl. z.B. [5, Theorem 6.3]), daß

$$i(\pi(\cdot, \lambda_0), U) = (-1)^0 = 1$$

gilt. Nach Lemma 5.8 (ii) bleibt der Fall $r(D_1 \pi(\underline{x}(\lambda_0), \lambda_0)) = 1$ zu untersuchen. Beachtet man, daß in [6, Lemma 4.10] nicht benutzt wird, daß der Kegel normal ist, so wird klar, daß der dort geführte Beweis bis auf Bezeichnungsänderungen wörtlich auf unsere Situation übertragen werden kann, da das benötigte Hilfsmittel, die lokale Parametrisierung

der Fixpunktmenge Σ_0 mit der Vorzeichenaussage über $\tilde{\lambda}'(\sigma)$, in Lemma 5.8 (iv) bereitgestellt wurde. $\square$

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir nun nachweisen, daß mit $\mu \in [0, \lambda^*)$ die folgende a priori-Abschätzung

$$(AP\mu) \quad \sup \{ \|x\| / \exists \lambda \geq \mu : (x, \lambda) \in \Sigma_0 \} < \infty$$

an die Anfangswerte der T-periodischen milden Lösungen von $(E\lambda)$ für $\lambda \in [\mu, \lambda^*)$ die Existenz mindestens einer von $\underline{u}(\lambda)$ verschiedenen T-periodischen milden Lösung von $(E\lambda)$ garantiert:

5.10 Satz:

Falls unter den Voraussetzungen von Lemma 5.8 die Ungleichung $0 < \mu < \lambda^* < \infty$ gilt und $(AP\mu)$ erfüllt ist, so ist $\lambda^* \in \Gamma$, und $(E\lambda)$ besitzt für $\lambda \in [\mu, \lambda^*)$ außer $\underline{u}(\lambda)$ mindestens eine weitere T-periodische milde Lösung $u \gg \underline{u}(\lambda) \gg 0$.

Beweis:

Daß $\lambda^* \in \Gamma$ ist, folgt nach Satz 5.5 (iv) aus $(AP\mu)$. Wie unsere Überlegungen vor Lemma 5.9 gezeigt haben, brauchen wir zum Nachweis einer zweiten T-periodischen Lösung nur Stetigkeitsstellen $\lambda \in [\mu, \lambda^*)$ von $\underline{x}$ zu untersuchen, für die $\underline{x}(\lambda)$ ein isolierter Fixpunkt von $\pi(\cdot, \lambda)$ ist. Für solche Werte von λ besitzt $\pi(\cdot, \lambda)$ auf dem Abschluß einer hinreichend kleinen offenen X_α -Umgebung $U = \underline{x}(\lambda) + \epsilon \text{IB}_{X_\alpha} \subset \overset{0}{P}_\alpha$ keinen von $\underline{x}(\lambda)$ verschiedenen Fixpunkt, und aufgrund unserer a priori-Abschätzung $(AP\mu)$ und Lemma 3.3 kann man $\rho > 0$ so groß wählen, daß $\bar{U} \subset \rho \text{IB}_{X_\alpha}^+$ und

$$\sup \{ \|x\|_{X_\alpha} / \exists \lambda \geq \mu : (x, \lambda) \in \Sigma_0 \} < \rho$$

gilt. Aus der Additivität und Homotopieinvarianz des Fixpunktindex

(vgl. [7 , Theorem 11.1]) folgt nun für $\sigma \geq \mu$ mit Lemma 5.9:

$$\begin{aligned} i(\pi(\cdot, \lambda), \rho \text{ IB}_{X_\alpha}^+ \setminus \overline{U}) \\ = i(\pi(\cdot, \lambda), \rho \text{ IB}_{X_\alpha}^+) - i(\pi(\cdot, \lambda), U) \\ = i(\pi(\cdot, \sigma), \rho \text{ IB}_{X_\alpha}^+) - 1 \quad . \end{aligned}$$

Wählen wir $\sigma > \lambda^*$, so ist aufgrund der Lösungseigenschaft des Fixpunktindex

$$i(\pi(\cdot, \sigma), \rho \text{ IB}_{X_\alpha}^+) = 0 \quad ,$$

so daß wir

$$i(\pi(\cdot, \lambda), \rho \text{ IB}_{X_\alpha}^+ \setminus \overline{U}) = -1$$

erhalten. Somit besitzt $\pi(\cdot, \lambda)$ mindestens einen Fixpunkt

$x \in \rho \text{ IB}_{X_\alpha}^+ \setminus \overline{U}$, der wegen der Minimalität von $\underline{x}(\lambda)$ und aufgrund des starken Wachstums von π in $P_\alpha \times \mathbb{R}_+^*$ der Relation $0 << \underline{x}(\lambda) << x$ genügt. Nach Lemma 5.7 folgt für alle $t \in [0, T]$

$$0 << \underline{u}(\lambda)(t) = S(\underline{x}(\lambda), \lambda)(t) << S(x, \lambda)(t) =: u(t) \quad .$$

□

Ob man in konkreten Fällen die a priori-Abschätzung $(AP)_\mu$ nachweisen kann, wird von ganz spezifischen Eigenschaften der Nichtlinearität, insbesondere von ihrem Verhalten für "große" x und für Parameter in der Nähe von λ^* , abhängen. Man kann erwarten, daß in diesem Zusammenhang Abbildungen, die der Bedingung (AL) genügen, am einfachsten zu untersuchen sind. Setzen wir (P) und (AL) voraus, so folgt aus Satz 3.4, daß $\pi(\cdot, \lambda)$ für $\mu > 0$ im Sinne der Gleichung

$$(5.1) \quad \lim_{\substack{\|x\|_{X_\alpha} \rightarrow \infty \\ x \in P_\alpha}} \sup_{\lambda \in [0, \mu]} \frac{\|\pi(x, \lambda) - \underline{U}_{\overline{D}(\lambda)}(T, 0)x\|}{\|x\|_{X_\alpha}} = 0$$

gleichmäßig bezüglich $\lambda \in [0, \mu]$ asymptotisch linear ist mit

$$D_1 \pi(\infty, \lambda) = \underline{U}_{\overline{D}(\lambda)}(T, 0) \quad \forall \lambda \in [0, \mu] \quad .$$

Falls λ^* endlich ist, definieren wir

$$\Gamma_\infty := \{\lambda \in [0, \lambda^*] \mid \Sigma_0 \cap [(P_\alpha \setminus \frac{1}{\varepsilon} B_{X_\alpha}^+) \cap (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)] \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0\}$$

und $\lambda_\infty := \sup \Gamma_\infty$, wobei $\sup \emptyset := 0$ gesetzt werde. Da die Menge Γ_∞ abgeschlossen ist, enthält sie λ_∞ , falls sie nicht leer ist.

Im folgenden werden wir die Bedingung (AL) mit (ALC) bezeichnen, falls

$$D \in C([0, T] \times \mathbb{R}_+, \mathcal{L}(Y, X))$$

für die in (AL) auftretende Abbildung D gilt.

5.11 Lemma:

Falls (P), (ALC) und $\lambda^* < \infty$ gilt, so folgt:

(i) $D_1\pi(\infty, \cdot) \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{L}^+(X_\alpha))$. Gilt außerdem (W), so ist $D_1\pi(\infty, \cdot)$ wachsend.

(ii) Zu jedem $\lambda \in \Gamma_\infty$ gibt es eine Folge $(x_j, \lambda_j) \in \Sigma_0$ mit

$$0 < \|x_j\| \rightarrow \infty, \quad \lambda_j \rightarrow \lambda,$$

und für $y_j := \frac{x_j}{\|x_j\|_{X_\alpha}}$ gilt

$$(5.11.1) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \|[\text{id} - D_1\pi(\infty, \lambda)] y_j\|_{X_\alpha} = 0.$$

Falls außerdem (K) erfüllt ist, so besitzt $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die in X_α gegen einen positiven normierten Fixpunkt von $D_1\pi(\infty, \lambda)$ konvergiert.

(iii) Falls $\lambda_\infty < \lambda^*$ ist, so gilt (AP μ) für alle $\mu \in (\lambda_\infty, \lambda^*)$.

Beweis:

(i) Für $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ist $D_1\pi(\infty, \lambda)$ nach Theorem 0.6 ein positiver Operator in X_α . Zum Nachweis der Stetigkeit von $D_1\pi(\infty, \cdot)$ betrachten wir $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ und setzen für $x \in X_\alpha$

$$v := H_0^{\overline{D}(\lambda)} x, \quad v_0 := H_0^{\overline{D}(\lambda_0)} x,$$

so daß ähnlich wie im Beweis der Gleichung (3.5.1)

$$v - v_0 = K_0^{\overline{D}(\lambda)} [\overline{D}(\lambda) - \overline{D}(\lambda_0)] v_0$$

folgt. Auch hier ist aufgrund der Stetigkeitsvoraussetzung an D die Bedingung (1.9) für D in einer geeigneten Umgebung Λ_0 von λ_0 erfüllt, und analog zu (3.5.3) erhalten wir für λ in einer hinreichend kleinen Umgebung von λ_0 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \| [D_1 \pi(\infty, \lambda) - D_1 \pi(\infty, \lambda_0)] \times \|_{X_\alpha} \\ = \| (v - v_0)(T) \|_{X_\alpha} \leq c \varepsilon \| \times \|_{X_\alpha} \end{aligned}$$

mit einer von ε und x unabhängigen Konstanten $c > 0$, womit die Stetigkeitsaussage bewiesen ist.

Ist außerdem (W) erfüllt, so gilt für $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda^*$ und $x \in \dot{P}_\alpha$ nach Lemma 5.4

$$\frac{\pi(\rho x, \lambda_1)}{\rho} \leq \frac{\pi(\rho x, \lambda_2)}{\rho} \quad \forall \rho > 0,$$

so daß für $\rho \rightarrow \infty$ die Ungleichung

$$D_1 \pi(\infty, \lambda_1) x \leq D_1 \pi(\infty, \lambda_2) x$$

folgt.

(ii) Nach Definition von Γ_∞ gibt es zu jedem $\lambda \in \Gamma_\infty$ eine Folge $(x_j, \lambda_j) \in \Sigma_0$ mit

$$0 < \|x_j\|_{X_\alpha} \rightarrow \infty, \quad \lambda_j \rightarrow \lambda,$$

und aus Lemma 3.3 ergibt sich sofort, daß x_j sogar in der X -Norm gegen ∞ konvergiert. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ können wir wegen (5.1) und der Stetigkeit von $D_1 \pi(\infty, \cdot)$ einen Index $j_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ wählen, so daß für alle $j \geq j_0$ die Ungleichungen

$$\sup_{0 \leq \mu \leq \lambda^*} \frac{\|\pi(x_j, \mu) - D_1 \pi(\infty, \mu) x_j\|_{X_\alpha}}{\|x_j\|_{X_\alpha}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$\|D_1 \pi(\infty, \lambda_j) - D_1 \pi(\infty, \lambda)\|_{(X_\alpha)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

gelten. Setzen wir nun $y_j := \frac{x_j}{\|x_j\|_{X_\alpha}} \in S_{X_\alpha}^+$,

so folgt für $j \geq j_0$:

$$\begin{aligned}
 & \| [Id - D_1 \pi(\infty, \lambda)] y_j \|_{X_\alpha} \\
 & \leq \frac{\| (x_j, \lambda_j) - D_1 \pi(\infty, \lambda_j) x_j \|}{\| x_j \|} \\
 & \quad + \| [D_1 \pi(\infty, \lambda_j) - D_1 \pi(\infty, \lambda)] y_j \|_{X_\alpha} \\
 & \leq \varepsilon .
 \end{aligned}$$

Damit ist (5.11.1) nachgewiesen.

Falls außerdem (K) gilt, ist $\pi(\cdot, \lambda)$ nach Satz 5.1 (i) vollstetig auf P_α , so daß $D_1 \pi(\infty, \lambda)|_{P_\alpha}$ gemäß Theorem 0.6 (i) vollstetig ist. Somit konvergieren für eine Teilfolge (y_{j_k}) von (y_j) die Bilder $D_1 \pi(\infty, \lambda) y_{j_k}$ in X_α und folglich wegen (5.11.1) auch die y_{j_k} selbst. Für den Grenzwert y der Folge (y_{j_k}) erhalten wir

$$D_1 \pi(\infty, \lambda) y = y .$$

- (iii) Für $\lambda_\infty < \mu < \lambda^*$ folgt $(AP\mu)$ unmittelbar aus der Definition von λ_∞ und der Kompaktheit von $[\mu, \lambda^*]$, da die X_α -Norm stärker als die X -Norm ist. $\square$

Aus den bisherigen Überlegungen ergibt sich nun der folgende Satz:

5.12 Theorem:

Unter den Voraussetzungen (P), (K), (SW) und (ALC) sei P normal, $\lambda_\infty < \lambda^* < \infty$ und $u = S(0, 0)$ T -periodisch. Dann sind die Behauptungen von Satz 5.5 erfüllt, und es gilt

- (i) $\lambda^* \in \Gamma$ und

$$\underline{u} : [0, \lambda^*] \rightarrow C_+([0, T], X_\alpha)$$

ist stark wachsend.

- (ii) Für jedes $\lambda \in (\lambda_\infty, \lambda^*)$ besitzt $(E\lambda)$ außer $\underline{u}(\lambda)$ eine zweite

T-periodische milde Lösung $u \gg \underline{u}(\lambda) \gg 0$.

Beweis:

- (i) Für $\mu \in (\lambda_\infty, \lambda^*)$ gilt $(A\mu)$ nach Lemma 5.11 (iii), so daß $\lambda^* \in \Gamma$ gemäß Satz 5.5 (iv) folgt. Lemma 5.8 (i) liefert das starke Wachstum von $\underline{u}$.
- (ii) folgt mit Lemma 5.11 (iii) unmittelbar aus Satz 5.10. $\square$

Wir wollen nun Bedingungen angeben, unter denen die Voraussetzung $\lambda_\infty < \lambda^* < \infty$ erfüllt ist. Was den kritischen Parameter λ^* angeht, so ist er unter den Voraussetzungen (P), (K) und (AL) nach Satz 5.1 positiv, falls $u = S(0,0)$ die *einzige* T-periodische milde X_α -Lösung von $(E\lambda)$ ist und $r(U_{\overline{D}(0)}(T,0)) < 1$ gilt, und er ist *endlich*, wenn z.B. $f(.,.,\lambda)$ für alle hinreichend großen λ lineare Minoranten gemäß Satz 4.8 besitzt.

Eine hinreichende Bedingung für die Ungleichung $\lambda_\infty < \lambda^*$ liefert das folgende Lemma.

5.13 Lemma:

Unter den Voraussetzungen (P), (K), (W) und (ALC) sei $0 < \lambda^* < \infty$, $P_\alpha \neq \emptyset$ und $U_{\overline{D}(\lambda^*)}(T,0)$ stark positiv in X_α . Falls ferner eine Zahl $\overline{\lambda} \in (0, \lambda^*)$ und ein Vektor $x_0 \in P_\alpha$ existiert, so daß

$$(5.13.1) \quad \pi(x, \lambda) < U_{\overline{D}(\lambda)}(T,0)x$$

für alle $(x, \lambda) \in \Sigma_0 \cap \{(x_0 + P_\alpha) \times (\overline{\lambda}, \lambda^*)\}$ gilt, so folgt $\lambda_\infty < \lambda^*$.

Beweis:

Wir nehmen an, es sei $\lambda_\infty = \lambda^*$, und können nach Lemma 5.11 (ii) eine Folge $(x_j, \lambda_j) \in \Sigma_0$ mit

$$0 < \|x_j\| \rightarrow \infty, \quad \lambda_j \rightarrow \lambda^*$$

wählen, von der wir wegen (K) o.E. annehmen können, daß $y_j := \frac{x_j}{\|x_j\|_{X_\alpha}}$

in X_α gegen einen Vektor $y_0 \in \mathcal{S}_{X_\alpha}^+ \cap \ker(\text{id} - U_{\overline{D}(\lambda^*)}(T, 0))$ konvergiert.

Da $U_{\overline{D}(\lambda^*)}(T, 0)$ stark positiv ist, gilt

$$y_0 + 2\rho \overline{B}_{X_\alpha} \subset P_\alpha$$

für eine hinreichend kleine positive Zahl ρ . Sei nun $j_0 \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, daß

$$\|y_{j_0} - y_0\|_{X_\alpha} \leq \rho, \quad \lambda_{j_0} > \overline{\lambda}$$

und

$$\|x_{j_0}\|_{X_\alpha} \geq \frac{\|x_0\|_{X_\alpha}}{\rho}$$

gilt. Dann erhalten wir

$$y_{j_0} + \rho \overline{B}_{X_\alpha} \subset y_0 + 2\rho \overline{B}_{X_\alpha} \subset P_\alpha$$

und somit

$$x_{j_0} - x_0 \in x_{j_0} + \rho \|x_{j_0}\|_{X_\alpha} \overline{B}_{X_\alpha} \subset P_\alpha,$$

so daß nach Voraussetzung mit Lemma 5.11 (i)

$$x_{j_0} = \pi(x_{j_0}, \lambda_{j_0}) < U_{\overline{D}(\lambda_{j_0})}(T, 0)x_{j_0} \leq U_{\overline{D}(\lambda^*)}(T, 0)x_{j_0}$$

folgt. Da $U_{\overline{D}(\lambda^*)}(T, 0)$ stark positiv ist, widerspricht diese Ungleichung nach Theorem 0.4 der Existenz von y_0 . $\square$

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir unter ähnlichen Voraussetzungen wie in Satz 5.6 konkrete Bedingungen an f formulieren, die eine Anwendung von Theorem 5.12 gestatten.

5.14 Satz:

Es sei (X, P) ein OBR, und es gelte (H2.1). Der Kegel P sei normal, während P_Y erzeugend (in Y) sei und P_{α_0} (in X_{α_0}) innere Punkte besitze. Ferner setzen wir (H1), (K) und (P1) voraus und betrachten eine in X_{α_0} quasipositive stark stetige Abbildung $D_0 : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$,

für die $r(U_{D_0}(T,0)) < 1$ gilt und die Operatoren $U_{D_0}(t,\tau)$ für $0 \leq \tau < t \leq T$ von X nach X_{α_0} stark positiv sind. Die Abbildung $f_0 \in C_+([0,T] \times P_Y, X)$ besitze eine rechtsseitige partielle Ableitung

$$D_2^+ f_0 \in C([0,T] \times P_Y, \mathcal{L}(Y, X))$$

und eine gleichmäßige asymptotische Ableitung $D_\infty \in C([0,T], \mathcal{L}(Y, X))$ im Sinne der Gleichung

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sup_{(t,x) \in [0,T] \times \rho \overline{B}_Y^+} \frac{\|f_0(t,x) - D_\infty(t)x\|}{\rho} = 0, \quad ,$$

und es existiere ein Vektor $e \in P_{\alpha_0} \cap \mathcal{S}_{X_{\alpha_0}}$ und Abbildungen

$$y \in C_+([0,T], X) \setminus \{0\}, \quad l: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \quad \text{und} \quad h: \mathbb{R}_+ \rightarrow P \quad \text{mit}$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} h(\beta) = 0, \quad \text{so daß} \\ -l(\rho) \text{id}_Y \leq D_2^+ f_0(t,x) \leq l(\rho) \text{id}_Y \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \rho \overline{B}_Y^+$$

und für alle $\beta \in \mathbb{R}_+$

$$f_0(t,x) \leq D_\infty(t)x + h(\beta) - y(t) \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times (\beta e + P_{\alpha_0})$$

gilt. Falls ferner $f_0(\cdot, 0) > 0$ gilt und eine Funktion $\sigma \in C_+([0,T]) \setminus \{0\}$ gegeben ist mit

$$f_0(t,x) \geq \sigma(t)x \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times P_Y,$$

so sind für $f(t,x,\lambda) := D_0(t)x + \lambda f_0(t,x)$ die Voraussetzungen von Theorem 5.12 erfüllt, und außer den dort bewiesenen Aussagen gilt:

Γ_∞ besteht aus genau einem Element $\lambda_\infty > 0$, die Zusammenhangskomponente C_0 von $(0,0)$ in Σ_0 enthält eine Folge (x_j, λ_j) mit $\|x_j\| \rightarrow \infty$ und $\lambda_j \rightarrow \lambda_\infty$, und für jede offene Umgebung U von λ_∞ ist

$$\{u \mid \exists \lambda \in \Gamma \setminus U : (u, \lambda) \in \Sigma\}$$

relativ kompakt in $C([0,T], X_{\alpha_0})$.

Beweis:

Da P normal ist, gibt es eine Konstante $\gamma \geq 1$, so daß für $t \in [0,T]$, $\rho > 0$, $x \in \rho \overline{B}_Y^+$ und $y \in P_Y$ wegen

$$0 \leq l(\rho)y - D_2^+ f_0(t, x)y \leq 2l(\rho)y$$

die Abschätzung

$$\|D_2^+ f_0(t, x)y\| \leq \|l(\rho)y\| + \|D_2^+ f_0(t, x)y - l(\rho)y\| \leq (2\gamma+1)l(\rho) \|y\|$$

folgt, aus der sich nach dem Mittelwertsatz die Bedingung (L) ergibt, da P_Y erzeugend ist (vgl. Beweis von Lemma 5.3) und $Y \hookrightarrow X$ gilt. Nach

Satz 3.4 ist (G) für $\sigma_0 = 1$ erfüllt, so daß mit den Positivitätsvoraussetzungen an f_0 und D die Bedingung (P) folgt. Für

$(x, \lambda) \in P_{\alpha_0} \times \mathbb{R}_+$ erhält man mit $\rho := \sup_{0 \leq t \leq T} \|S(x, \lambda)(t)\|_Y$ die Ungleichung

$$f_1(t, y) := [D_0(t) - \lambda l(\rho)]y \leq G(t, x, \lambda)y =: f_2(t, y) \quad \forall y \in P_Y,$$

aus der nach Satz 3.6 (wähle dort $f = f_1$) und Lemma 1.12

$$U_{\bar{G}(x, \lambda)}(t, \tau) \geq e^{-\lambda l(\rho)(t-\tau)} U_{\bar{D}_0}(t, \tau) \quad \forall 0 \leq \tau < t \leq T$$

folgt. Somit ist $U_{\bar{G}(x, \lambda)}(t, \tau)$ stark positiv von X nach X_{α_0} . Nehmen wir zum Nachweis von (SW) an, es gebe ein $(x, \lambda) \in P_{\alpha_0} \times \mathbb{R}_+$ mit

$$g(\cdot, x, \lambda) = F_0(S(x, \lambda)) = 0,$$

so ergibt sich $S(x, \lambda) = H_0^{\sigma} x$, was für $x = 0$ der Ungleichung $f_0(\cdot, 0) > 0$ widerspricht und für $x > 0$ wegen $\sigma H_0^{\sigma} x \leq F_0(H_0^{\sigma} x) = 0$ im Widerspruch zur Positivität von σ steht. Also ist (SW) erfüllt.

Insbesondere ist $S(0, \lambda)$ für $\lambda > 0$ nicht T -periodisch. Da ferner für

$$\lambda > \hat{\lambda} := - \frac{\ln r(U_{\bar{D}_0}(T, 0))}{\int_0^T \sigma(s) ds}$$

und $C(t, \lambda) := D_0(t) + \lambda \sigma(t) \text{id}$ nach Lemma 1.12 die Ungleichung

$r(U_{\bar{C}(\lambda)}(T, 0)) > 1$ gilt, erhält man aus Satz 4.8, daß $\lambda^* \leq \hat{\lambda}$ endlich

ist. Wegen $\pi(\cdot, 0) = U_{\bar{D}_0}(T, 0)$ folgt mit Satz 5.1 aus unseren Voraussetzungen, daß λ^* positiv und die Zusammenhangskomponente C_0 von $(0, 0)$ in

Σ_0 eine $X \times \mathbb{R}$ -unbeschränkte Menge ist. Insbesondere ist Γ_{∞} nichtleer.

Trivialerweise gilt (ALC) mit $D(t, \lambda) = D_0(\cdot) + \lambda D_{\infty}(t)$ und wegen der Ab-

geschlossenheit von P folgt die Ungleichung

$$D_{\infty}(t)x = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{f_{\rho}(t, \rho x)}{\rho} \geq \sigma(t)x \quad (t, x) \in [0, T] \times P_Y,$$

so daß man aus Satz 3.6 und Lemma 1.12 für $0 \leq \lambda < \mu$ und $0 \leq \tau < t \leq T$

$$U_{\overline{D}(\lambda)}(t, \tau) \geq e^{\lambda \int_{\tau}^t \sigma(s) ds} U_{\overline{D}_0}(t, \tau)$$

und

$$U_{\overline{D}(\mu)}(t, \tau) \geq e^{(\mu - \lambda) \int_{\tau}^t \sigma(s) ds} U_{\overline{D}(\lambda)}(t, \tau)$$

erhält, woraus insbesondere die starke Positivität dieser Operatoren in

X_{α_0} und nach Theorem 0.4 auch

$$r(U_{\overline{D}(\mu)}(T, 0)) > r(U_{\overline{D}(\lambda)}(T, 0)) \geq r(U_{\overline{D}_0}(T, 0))$$

folgt. Da nach Lemma 5.11 (ii) und Theorem 0.4

$$r(U_{\overline{D}(\lambda)}(T, 0)) = 1 \quad \forall \lambda \in \Gamma_{\infty}$$

gilt, besteht Γ_{∞} aus genau einem Element $\lambda_{\infty} > 0$, und nach unseren

obigen Überlegungen enthält C_0 eine Folge $(x_j, \lambda_j) \in \Sigma_0$ mit

$0 < \|x_j\| \rightarrow \infty$ und $\lambda_j \rightarrow \lambda_{\infty}$. Ist nun U eine offene Umgebung von λ_{∞} ,

so ist $\Sigma_0 \cap [P_{\alpha_0} \times (\Gamma \setminus U)]$ beschränkt in $X_{\alpha_0} \times \mathbb{R}$, da Γ_{∞} andernfalls

ein zweites Element enthält. Die Vollstetigkeit von π liefert nun, daß

$\Sigma_0 \cap [P_{\alpha_0} \times (\Gamma \setminus U)]$ relativ kompakt in $X_{\alpha_0} \times \mathbb{R}$ ist, so daß nach Satz

3.1 (ii)(b) folgt, daß

$$\{u / \exists \lambda \in \Gamma \setminus U : (u, \lambda) \in \Sigma\} = S(\Sigma_0 \cap [P_{\alpha_0} \times (\Gamma \setminus U)])$$

relativ kompakt in $C([0, T], X_{\alpha_0})$ ist. Um die schließlich noch nachzu-

weisende Voraussetzung $\lambda_{\infty} < \lambda^*$ in Theorem 5.12 zu verifizieren, wenden

wir Lemma 5.13 an und zeigen, daß für $x_0 = \beta e$ mit hinreichend großem

$\beta \in \mathbb{R}_+$ die Bedingung (5.13.1) erfüllt ist. Wählen wir

$(x, \lambda) \in (\beta e + P_{\alpha_0}) \times [\frac{\lambda^*}{2}, \lambda^*]$, wobei wir die Zahl $\beta \in \mathbb{R}_+$ später noch

genauer festlegen werden, so gilt

$$S(x, \lambda) = \overline{D}_0 x + \lambda K_0 F_0(S(x, \lambda)) \geq \overline{D}_0 x \geq \beta \overline{D}_0 e,$$

und mit

$$\delta := d_{X_{\alpha_0}} (H_0^{\overline{D}} e([0, T]), X_{\alpha_0} \setminus P_{\alpha_0}) > 0$$

folgt

$$S(x, \lambda)(t) \geq \beta \delta e \quad \forall t \in [0, T],$$

so daß wir

$$\begin{aligned} S(x, \lambda) &= H_0^{\overline{D}(\lambda)} x + \lambda K_0^{\overline{D}(\lambda)} [F_0(S(x, \lambda)) - \overline{D}_\infty S(x, \lambda)] \\ &\leq H_0^{\overline{D}(\lambda)} x + \lambda^* K_0^{\overline{D}(\lambda^*)} h(\beta \delta) - \frac{\lambda^*}{2} K_0^{\overline{D}(\frac{\lambda^*}{2})} y \end{aligned}$$

erhalten. Da nach Lemma 2.9 (ii)

$$[K_0^{\overline{D}(\frac{\lambda^*}{2})} y](T) \in P_{\alpha_0}^0$$

gilt, können wir β so groß wählen, daß für $(x, \lambda) \in \Sigma_0 \cap$

$$\cap \{(\beta e + P_{\alpha_0}) \times [\frac{\lambda^*}{2}, \lambda^*]\}$$

$$[K_0^{\overline{D}(\lambda^*)} h(\beta \delta)](T) < \frac{1}{2} [K_0^{\overline{D}(\frac{\lambda^*}{2})} y](T)$$

und somit (5.13.1) erfüllt ist. $\square$

5.15 Bemerkungen:

- (i) Das theoretische Gerüst, das hinter den Ergebnissen dieses Paragraphen steht, ist nicht neu. Es besteht aus abstrakten Sätzen über globale Kontinua positiver Lösungen nichtlinearer Gleichungen in geordneten Banachräumen, die H. Amann in [6, §§ 4,5] bewies (vgl. auch [7, §§ 17,20] und die in [7, § 22] angegebene Literatur). Hätten wir in unseren Sätzen stets vorausgesetzt, daß P_{α} normal ist, so wären einige der in [6] bewiesenen Sätze unmittelbar anwendbar. Im Hinblick auf die Anwendungen (vgl. § 6) ist es jedoch vernünftig, sich von dieser Voraussetzung zu befreien. Dies ist uns im wesentlichen durch die Voraussetzungen (G) und (K) gelungen, durch die wir erreicht haben, daß π jede $X \times \mathbb{R}$ -beschränkte

Teilmenge von $P_\alpha \times \mathbb{R}$ (insbesondere jedes Ordnungsintervall, falls P normal ist) auf eine relativ kompakte Teilmenge von P_α abbildet.

(ii) Die Aussage des Satzes 5.1 kann auch bewiesen werden, falls

$\pi(\cdot, 0)$ nicht asymptotisch linear ist (vgl. [7, Theorem 17.1]).

(iii) Da wir in den letzten Sätzen dieses Paragraphen die starke Posi-

tivität gewisser Evolutionsoperatoren vorausgesetzt haben, wäre es interessant zu wissen, wann dies erfüllt ist. Falls unter den Voraussetzungen (H1), (P1) und (H2.1) die Abbildung

$G \in C^0([0, T], \mathcal{L}(Y, X))$, $v \in (0, 1)$, strikt positive Evolutionsoperatoren $U_G(t, \tau)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, erzeugt, so zeigt man für $\alpha \in [\alpha_0, 1)$ leicht, daß diese Operatoren von X nach X_α sogar stark positiv sind, falls es zu jedem Punkt

$(t, x) \in (0, T) \times (\partial P_\alpha \setminus \{0\})$ ein (nichttriviales) Funktional

$x' \in P^* \cap \{x\}^0$ gibt mit $\langle x', G(t)x \rangle > 0$. Diese Bedingung ist im Falle $X = Y = X_1 = \mathbb{R}^M$ erfüllt, falls die Matrix, mit der wir

$G(t)$ identifizieren können, stark quasipositiv ist. Sie eignet sich zwar zur Anwendung auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen (vgl. [34, Theorem 4.7]), für die Anwendung auf semilineare parabolische Differentialgleichungssysteme ist sie jedoch ziemlich einschränkend, und wir werden sie mit Hilfe des starken Maximumprinzips geeignet abschwächen (vgl. Lemma 6.6).

(iv) Die Aussage von Satz 5.10 bleibt richtig, wenn man anstelle von

(AP_μ) nur voraussetzt, daß es eine positive Zahl ρ gibt mit

$$\sup_{0 \leq \lambda < \lambda^*} \|x(\lambda)\|_{X_\alpha} < \rho$$

und

$$\Sigma_0 \cap (\rho \mathbb{S}_{X_\alpha} \times [\mu, \infty)) = \emptyset$$

(vgl. [6, Theorem 4.11]). Bis auf die Behauptung " $\lambda^* \in \Gamma$ "

bleibt sie sogar richtig, wenn wir diese Bedingung noch weiter abschwächen, indem wir für jedes $\lambda \in \Gamma \cap [\mu, \infty)$ die Existenz einer

Zahl $\rho(\lambda) > \|\underline{x}(\lambda)\|_{X_\alpha}$ mit

$$\Sigma_0 \cap (\rho(\lambda) \times X_\alpha \times [\lambda, \infty)) = \emptyset$$

voraussetzen.

- (v) Wie im Anschluß an Theorem 9 zu Anfang dieser Arbeit bereits angedeutet, folgt aus der von H. Amann in [7, Theorem 20.12] im Zusammenhang mit allgemeinen Fixpunktgleichungen in geordneten Banachräumen benutzten Voraussetzung

$$\pi(x, \lambda) < D_1 \pi(x, \lambda)x$$

durch Differentiation der Abbildung

$$g(\tau) := \frac{\pi(\tau x, \lambda)}{\tau}, \quad \tau \in [1, \infty),$$

daß g strikt wachsend ist und somit (5.13.1) erfüllt ist. Unsere Bedingung ist also allgemeiner und zeigt, daß es lediglich darauf ankommt, daß $\pi(\cdot, \lambda)$ strikt durch die asymptotische Ableitung majorisiert wird, ein Sachverhalt, der geometrisch im Eindimensionalen einleuchtet. Da man offensichtlich den Beweis von Lemma 5.13 wörtlich auf die in [7, Theorem 20.12] betrachtete Situation übertragen kann, läßt sich die dortige Argumentation beträchtlich vereinfachen.

§ 6. Beweise der Theoreme 1-9

Wir wollen in diesem letzten Abschnitt die zu Anfang dieser Arbeit formulierten Resultate über parabolische Systeme beweisen und setzen zunächst die dort zur Bedingung (A1) zusammengefaßten Vereinbarungen voraus. Wir wählen eine Zahl $p > N$ und bezeichnen die übliche Norm in dem OBR $(X, P) = (L_p(\Omega, \mathbb{R}^M), L_p(\Omega, \mathbb{R}_+^M))$ mit $\|\cdot\|$. Man beachte, daß P normal ist. Der Definitionsbereich $D_A := W_{p,B}^2(\Omega, \mathbb{R}^M)$, der durch

$$A(t)x := A(\cdot, t, D)x(\cdot), \quad 0 \leq t \leq T,$$

für $x \in D_A$ definierten Operatoren ist ein dichter Unterraum von X , und aus den Resultaten von Agmon, Douglis und Nirenberg [2] folgt, daß es positive Konstanten c_1 und ω gibt, so daß

$$(6.1) \quad c_1 \|x\|_{W_p^2} \leq \|A_\omega(t)x\| \leq c_2 \|x\|_{W_p^2} \quad \forall x \in D_A$$

und

$$\|(\lambda \text{id} + A(t))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{c_3}{1+|\lambda-\omega|}$$

für alle $\lambda \in \{\mu \in \mathbb{C} \mid \operatorname{re} \mu \geq \omega\} \subset \rho(-A(t))$ und $t \in [0, T]$ genügt, woraus sich unmittelbar (H1.1) ergibt. Ferner zeigt man leicht, daß es eine Konstante $c > 0$ gibt mit

$$\| [A(t_2) - A(t_1)] x \| \leq c |t_2 - t_1|^{\frac{\nu_0}{2}} \|x\|_{W_{p_0}^2} \quad \forall x \in D_A,$$

und aus (6.1) folgt, daß auch (H1.2) mit $\nu_0 = \frac{\nu_0}{2}$ erfüllt ist. Schließlich ergibt sich aus (6.1) auch die Bedingung (K), da W_p^2 kompakt in X eingebettet ist (vgl. [1, Theorem 6.2]). Somit sind die in § 1. bewiesenen Sätze über die linearen Lösungsoperatoren H_τ und K_τ gültig. Wir wollen nun ein klassisches Resultat über die Lösbarkeit des linearen Anfangsrandwertproblems

$$(6.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + A(.,.,D)u = f \quad \text{in } Q_{\tau T} \\ B(.,D)u = 0 \quad \text{auf } S_{\tau T} \\ u(\tau) = x \quad \text{auf } \bar{\Omega} \end{array} \right.$$

zitieren und führen für $(x, f) \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M) \times C(\bar{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M)$ die folgende Sprechweise ein: Wir sagen (x, f) sei (A, B) -verträglich, wenn

$$B(s, D)x(s) = 0 \quad \forall s \in \partial\Omega$$

und für alle $k \in \{1, \dots, M\}$ mit $\delta_k = 0$

$$A^k(s, t, D)x_k(s) = f_k(s, t) \quad \forall s \in \partial\Omega$$

gilt.

6.1 Satz:

Es gelte (A1), und es seien $\tau \in [0, T]$ und $\mu \in (0, \mu_0]$ vorgegeben.

Dann besitzt (6.2) für jedes (A, B) -verträgliche Paar

$(x, f) \in C^{2+\mu}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M) \times C^{(\mu)}(\bar{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M)$ genau eine klassische Lösung u , es gilt

$$u = H_\tau x + K_\tau f \in C^{(2+\mu)}(\bar{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M)$$

und

$$\|u\|_{C^{(2+\mu)}(\bar{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M)} \leq c(\|x\|_{C^{2+\mu}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M)} + \|f\|_{C^{(\mu)}(\bar{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M)})$$

mit einer von x und f unabhängigen Konstanten $c > 0$.

Beweis:

Da (6.2) Diagonalgestalt besitzt, folgt die Existenz- und Regularitätsaussage aus [36, Chap. IV, Theorem 5.2, 5.3]. Trivialerweise ist u gleichzeitig die eindeutig bestimmte starke Lösung von

$$\dot{u}(t) + A(t)u(t) = f(t) \quad \forall 0 < t \leq T$$

$$u(\tau) = x$$

in X .

□

Einer funktionalanalytischen Behandlung der Gleichung (6.2) steht die schwerfällige Verträglichkeitsbedingung in diesem Satz im Wege. Bevor wir uns von ihr befreien, formulieren wir noch das folgende starke Maximumprinzip, dessen Beweis man für Dirichlet-Randbedingungen in [48 , Chap. 3, Theorem 13,14] findet.

6.2 Satz:

Es gelte (A1), und es sei $0 \leq \tau < T' \leq T$. Falls

$u \in C^{(2)}(Q_{\tau T'}) \cap C(\overline{Q}_{\tau T'})$ den Ungleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(.,.,D)u \geq A_0 u \quad \text{in } Q_{\tau T'}$$

$$B(.,D)u \geq 0 \quad \text{auf } S_{\tau T'}$$

$$u(\tau) \geq 0 \quad \text{auf } \overline{\Omega}$$

genügt, so folgt:

(i) $u \geq 0$ auf $\overline{Q}_{\tau T'}$,

(ii) Falls für ein $k \in \{1, \dots, M\}$ eine Zahl $t_0 \in [\tau, T']$ mit

$u_k(t_0) > 0$ existiert, so gilt

$$u_k(s, t) > 0 \quad \forall (s, t) \in \Omega \times (t_0, T'] ,$$

wobei es nur im Fall $\delta_k = 0$ Punkte $(s, t) \in \partial\Omega \times (t_0, T']$ mit

$u_k(s, t) = 0$ geben kann. Ist (s, t) ein solcher Punkt, so gilt

$$\frac{\partial u_k}{\partial \beta^k}(s, t) < 0 .$$

Beweis:

(i) Für alle $k \in \{1, \dots, M\}$ mit $\delta_k = 1$ gibt es gemäß [4 , Lemma 3.2] eine Funktion $x_0^k \in C^2(\overline{\Omega})$ mit

$$x_0^k(s) = 0 , \quad \frac{\partial x_0^k}{\partial \beta^k}(s) = b_0^k(s) - 1 \quad \forall s \in \partial\Omega .$$

Wählen wir $\tau_k \in C_0^\infty(\Omega, [0, 1])$ mit

$$\tau_k(s) = 1 \quad \forall s \in (x_0^k)^{-1}((-\infty, -\frac{1}{2}]) ,$$

und setzen $x_o^i = 0 = \zeta_i$ für alle übrigen Indizes $i \in \{1, \dots, M\}$, so erfüllt

$$x_k := 1 + (1 - \zeta_k)x_o^k \in C^2(\bar{\Omega}, [\frac{1}{2}, \infty))$$

für alle $1 \leq k \leq M$ die Gleichung

$$x_k(s) = 1 + x_o^k(s) \quad \forall s \in \bar{\Omega} \setminus \text{supp } \zeta_k,$$

und somit gilt

$$\tilde{b}_o^k(s) := \frac{1}{x_k(s)} \left[b_o^k x_k - \delta_k \frac{\partial x_k}{\partial \beta^k} \right](s) = 1 \quad \forall s \in \bar{\Omega}.$$

Definieren wir nun mit

$$\tilde{a}_o^k := \frac{1}{x_k} \left[\sum_{i,j=1}^N a_{ij} (D_i D_j x_k - 2 \frac{D_i x_k D_j x_k}{x_k}) - \sum_{i=1}^N a_i D_i x_k \right]$$

die Differentialoperatoren

$$\tilde{A}^k(.,.,D) := A^k(.,.,D) + 2 \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} \frac{D_j x_k}{x_k} \right) D_i + \tilde{a}_o^k$$

und die Randoperatoren

$$\tilde{B}^k(.,D) := \tilde{b}_o^k + \delta_k \frac{\partial}{\partial \beta^k},$$

so genügen für $\epsilon > 0$ und

$$\sigma > \max_{\substack{(s,t) \in \bar{Q}_T \\ 1 \leq k \leq M}} \left[\sum_{i=1}^M \frac{x_k}{x_i}(s) a_o^{ki}(s,t) - \tilde{a}_o^k(s,t) \right]$$

die Abbildungen

$$v_k(s,t) := x_k(s)u_k(s,t) + \epsilon e^{\sigma(t-\tau)}$$

den Ungleichungen

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{A}^k(s,t,D) \right] v_k &= x_k \left[\frac{\partial}{\partial t} + A^k(s,t,D) \right] u_k + \epsilon e^{\sigma(t-\tau)} \left[\sigma + \tilde{a}_o^k \right] \\ (6.2.1) \quad &\geq \sum_{i=1}^M \frac{x_k}{x_i} a_o^{ki} v_i + \epsilon e^{\sigma(t-\tau)} \left[\sigma + \tilde{a}_o^k - \sum_{i=1}^M \frac{x_k}{x_i} a_o^{ki} \right] \\ &> \sum_{i=1}^M \frac{x_k}{x_i}(s) (a_o^{ki} v_i)(s,t) \quad \forall (s,t) \in Q_{\tau,T}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}^k(s, D) v_k(s, t) &= x_k(s) B^k(s, D) u_k(s, t) + \tilde{b}_0^k \varepsilon e^{\sigma(t-\tau)} \\
 (6.2.2) \quad &\geq \tilde{b}_0^k(s) \varepsilon e^{\sigma(t-\tau)} > 0 \quad \forall (s, t) \in S_{\tau T^1} .
 \end{aligned}$$

Für $v = \sum_{k=1}^M v_k e_k^M$ ist wegen $v(\tau) \geq \varepsilon \mathbb{1}^M$ die Zahl

$$t_0 := \sup \{ \bar{t} \in [\tau, T^1] / v|_{\overline{Q_{\tau \bar{t}}}} \geq 0 \}$$

aus Stetigkeitsgründen größer als τ . Wir wollen nun die Annahme, sie sei kleiner als T^1 , zum Widerspruch führen. In diesem Fall gäbe es nämlich einen Index $k \in \{1, \dots, M\}$ und einen Punkt $s_0 \in \overline{\Omega}$ mit $v_k(s_0, t_0) = 0$. Läge s_0 auf $\partial\Omega$, so hätten wir wegen $v_k(t_0) \geq 0$

$$\frac{\partial v_k}{\partial \beta^k}(s_0, t_0) \leq 0 ,$$

im Widerspruch zu (6.2.2). Der Punkt s_0 kann aber auch nicht im Innern von Ω liegen, denn dann besäße $v_k(t_0)$ ein lokales Minimum in s_0 , und wir erhielten

$$\tilde{A}^k(s_0, t_0, D) v_k(s_0, t_0) \leq 0 .$$

Da wegen $v|_{\overline{Q_{\tau t_0}}} \geq 0$ außerdem $\frac{\partial v_k}{\partial t}(s_0, t_0) \leq 0$ und

$$\sum_{i=1}^M \frac{x_k}{x_i}(s_0) (a_o^{ki} v_i)(s_0, t_0) \geq 0$$

gilt, widerspräche dies der Ungleichung (6.2.1). Somit ist $t_0 = T^1$,

und der Grenzprozess $\varepsilon \rightarrow 0+$ liefert, daß $\sum_{k=1}^M x_k u_k e_k^M$ und damit wegen

$x_k(s) > 0 \quad \forall s \in \overline{\Omega}$ auch u selbst nichtnegativ ist.

(ii) Aus (i) folgt nun, daß für alle $k \in \{1, \dots, M\}$

$$[\frac{\partial}{\partial t} + A^k(\dots, D) - a_o^{kk}] u_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M a^{ki} u_i \geq 0$$

gilt, so daß u_k nach [25a, Chap. 2, Theorem 2.5] für jede Zahl

$t_0 \in [\tau, T^1]$ mit $u_k(t_0) > 0$ keine Nullstelle in $\Omega \times (t_0, T^1]$ besitzt.

Aus [48, Chap. 3, Theorem 7, Remark (ii)] folgt schließlich, daß für

Nullstellen $(s_0, t_0) \in \partial\Omega \times (\tau, T^1)$ von u_k die Ungleichung

$\frac{\partial u_k}{\partial \beta^k}(s_0, t_0) < 0$ gilt, was im Falle $\delta_k = 1$ im Widerspruch zu $B^k(., D)u_k \geq 0$ steht. $\square$

Der folgende Einbettungssatz erweitert eine in [10, Proposition 4.1] bewiesene Aussage.

6.3 Lemma:

Falls (A1) gilt, so folgt mit den Bezeichnungen aus § 1. für

$$X = L_p(\Omega, \mathbb{R}^M), \quad p > N, \quad \tau \in [0, T], \quad \alpha \in \left(-\frac{N}{2p}, 1\right] \text{ und } \sigma \in \left(0, 2\alpha - \frac{N}{p}\right)$$

die Einbettung

$$X_\alpha(\tau) \hookrightarrow C^\sigma(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M)$$

Beweis:

Wählen wir $\alpha \in \left(-\frac{N}{2p}, 1\right]$ und $\sigma \in \left(0, 2\alpha - \frac{N}{p}\right)$, so ist

$a := \frac{1}{2}\left(\sigma + \frac{N}{p}\right) \in (0, \alpha)$, und nach [25b, Theorem I.10.1] gibt es eine Konstante $c > 0$ derart, daß für alle $x \in D_A$

$$\|x\|_{C^\sigma(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M)} \leq c \|x\|_{W_p^2(\Omega, \mathbb{R}^M)}^a \|x\|^{1-a}$$

gilt. Der Beweis verläuft nun genau wie in [10, Proposition 4.1], wenn man dort $A(0)$ durch $A_\omega(\tau)$ ersetzt. $\square$

Für $\alpha \in \left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{N}{p}\right), 1\right]$ und $\sigma \in \left[1, 2\alpha - \frac{N}{p}\right]$ kann man die Aussage dieses Lemmas sogar zu

$$(6.3) \quad X_\alpha(\tau) \hookrightarrow C_B^\sigma(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M)$$

verschärfen.

Setzen wir nun unter der Voraussetzung (A1) für $k \in \{1, \dots, M\}$

$$V_k := \begin{cases} C_0^{2+\mu}(\Omega) & , \text{ falls } \delta_k = 0 \\ C_B^{2+\mu}(\bar{\Omega}) & , \text{ falls } \delta_k = 1 \end{cases}$$

und definieren

$$C_{B^k}(\bar{\Omega}) := cl_{C(\bar{\Omega})} V_k ,$$

so können wir das folgende Lemma beweisen.

6.4 Lemma:

Unter der Voraussetzung (A1) gilt

$$C_{B^k}(\bar{\Omega}) = \{x \in C(\bar{\Omega}) / (1-\delta_k)x|_{\partial\Omega} = 0\}$$

für alle $k \in \{1, \dots, M\}$.

Beweis:

Da V_k eine Teilmenge der in $C(\bar{\Omega})$ abgeschlossenen Menge

$\{x \in C(\bar{\Omega}) / (1-\delta_k)x|_{\partial\Omega} = 0\}$ ist, gilt trivialerweise die Inklusion

$$C_{B^k}(\bar{\Omega}) \subset \{x \in C(\bar{\Omega}) / (1-\delta_k)x|_{\partial\Omega} = 0\} .$$

Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion betrachten wir zunächst den Fall

$\delta_k = 0$ und wählen ein beliebiges $x \in C(\bar{\Omega})$ mit $x|_{\partial\Omega} = 0$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir eine Funktion $x_0 \in C_0(\Omega)$ mit

$\|x_0 - x\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Da es nach [1, Lemma 2.18 (b), (e)] eine Abbildung

$x_1 \in C_0^\infty(\Omega) \subset V_k$ mit $\|x_1 - x_0\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ gibt, folgt die Behauptung, da ε beliebig klein gewählt werden kann. Für den Fall $\delta_k = 1$ wurde sie

in [19, Lemma 8.2] bewiesen. $\square$

Mit Hilfe der letzten beiden Lemmata und der Ergebnisse aus § 1. können wir nun das Problem (6.2) in "C-Räumen" behandeln, ohne die (A,B)-Verträglichkeit von (x, f) vorauszusetzen. Wir definieren

$$C_B(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M) := \prod_{k=1}^{k_0} C_{B_k}(\bar{\Omega})^{M_k}$$

und

$$[D_0(t)x](s) := A_0(s, t)x(s) \quad \forall x \in X, (s, t) \in \bar{Q}_T .$$

6.5 Lemma:

Es gelte (A1), und es sei $\tau \in [0, T)$ und $p > N$. Dann erfüllt für alle $x \in X$

$$u = H_{\tau}^{\overline{D}_0} x \in C^{(2+\mu)_0}(Q_{\tau T}, \mathbb{R}^M)$$

punktweise die Gleichungen

$$u_t + A(\cdot, \cdot, D)u = A_0 u \quad \text{in } Q_{\tau T}$$

$$B(\cdot, D)u = 0 \quad \text{auf } S_{\tau T},$$

und es gelten die folgenden Regularitäts- und Stetigkeitsaussagen:

$$(i) \quad H_{\tau}^{\overline{D}_0} \in \mathcal{L}(X, C^{(2+\mu)_0}(Q_{\tau T}, \mathbb{R}^M))$$

$$(ii) \quad H_{\tau}^{\overline{D}_0} \in \mathcal{L}(C_{\beta}(\overline{\tau}, \mathbb{R}^M), C(\overline{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M))$$

$$(iii) \quad H_{\tau}^{\overline{D}_0} \in \mathcal{L}(X_{\beta}(\tau), C^{(1+\mu)}(\overline{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M))$$

$$\text{für alle } \beta \in (\frac{1}{2}(1 + \frac{N}{p}), 1) \text{ und } \mu \in (0, 2\beta - 1 - \frac{N}{p})$$

$$(iv) \quad K_{\tau}^{\overline{D}_0} \in \mathcal{L}(C(\overline{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M), C^{(1+\mu)}(\overline{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M))$$

$$\text{für alle } \mu \in (0, 1).$$

Beweis:

(i) Sei $x \in X$ und $\sigma \in (\tau, T)$ beliebig. Wählen wir

$$\zeta \in C_0^{\infty}([\tau, \infty), [0, 1]) \quad \text{mit}$$

$$\zeta(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \in [\tau, \frac{\tau+\sigma}{2}] \\ 1 & \forall t \geq \sigma \end{cases}$$

und $\alpha \in (\frac{1}{2}(\mu_0 + \frac{N}{p}), 1)$, so erhält man aus Lemma 6.3 die Einbettung

$$C^{\frac{\mu_0}{2}}((\tau, T], X_{\alpha}) \hookrightarrow C^{(\mu_0)}(Q_{\tau T}, \mathbb{R}^M),$$

und nach Lemma 1.11 ist

$$H_{\tau}^{\overline{D}_0} \in \mathcal{L}(X, C^{(\mu_0)}(Q_{\tau T}, \mathbb{R}^M)).$$

Mit Satz 1.6 ergibt sich wegen $\overline{D}_H \overline{D}_x \in C^{\frac{\mu_0}{2}}((\tau, T], X) \cap L_1((\tau, T], X)$,

daß $u := \zeta H_{\tau}^{\overline{D}_0} x = \zeta [H_{\tau} x + K_{\tau} \overline{D}_H \overline{D}_x x]$ eine starke Lösung von

$$(6.5.1) \quad \begin{cases} \dot{u} + A(t)u = \overline{D}_0 u + \zeta H_{\tau}^{\overline{D}_0} x =: f \\ u(\tau) = 0 \end{cases}$$

ist. Da $f \in C^{(\mu_0)}(\overline{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M)$ und $(0, f)$ trivialerweise (A, B) -verträglich ist, ist nach Satz 6.1

$$v := K_{\tau} f \in C^{(2+\mu_0)}(\overline{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M)$$

eine klassische Lösung von (6.2) mit $x = 0$ und somit gleich der eindeutig bestimmten starken Lösung u von (6.5.1). Ferner genügt v der Abschätzung

$$\|v\|_{C^{(2+\mu_0)}(\overline{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M)} \leq c \|f\|_{C^{(\mu_0)}(\overline{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M)}.$$

Wegen $(x \rightarrow f) \in \mathcal{L}(X, C^{(\mu_0)}(\overline{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M))$ folgt, daß

$$\zeta H_{\tau}^{\overline{D}_0} \in \mathcal{L}(X, C^{(2+\mu_0)}(\overline{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M))$$

gilt, woraus sich die Behauptung (i) ergibt, da σ beliebig klein gewählt werden kann.

(ii) Konstruieren wir uns für jedes $k \in \{1, \dots, M\}$ ähnlich wie im Beweis von Satz 6.2 eine Funktion $x_k \in C^2(\overline{\Omega}, [1, \infty))$ mit

$$B^k(s, D)x_k(s) \geq 0 \quad \forall s \in \partial\Omega$$

und wählen eine Zahl

$$\sigma \geq \frac{\sum_{i=1}^M a_{0i}^{ki}(s, t)x_i(s) - A^k(s, t, D)x_k(s)}{\max_{\substack{(s, t) \in \overline{Q}_T \\ 1 \leq k \leq M}} x_k(s)}$$

so gelten für

$$v(s, t) := e^{\sigma(t-\tau)} \sum_{k=1}^M x_k(s) e_k^M$$

die Ungleichungen

$$\begin{aligned} v_t + A(\cdot, \cdot, D)v &\geq A_0 v && \text{in } Q_{\tau T} \\ B(\cdot, D)v &\geq 0 && \text{auf } S_{\tau T} \\ v(\tau) &\geq \mathbb{1}^M && \text{auf } \overline{\Omega}, \end{aligned}$$

und für beliebiges $x \in V := \prod_{k=1}^M V_k$ folgt aus (i), Lemma 1.11 und Lemma 6.3,

daß

$$u := H_{\tau}^{\overline{D}_0} x \in C^{(2+\mu)_0}(\overline{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M) \cap C(\overline{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M)$$

gilt, so daß wegen

$$x \in \|x\|_{C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M)} \{ -1^M, 1^M \}$$

aus Satz 6.2 (i) die Abschätzung

$$\|x\|_{C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M)}^{\nu} \leq H_{\tau}^{\overline{D}_0} x \leq \|x\|_{C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M)}^{\nu}$$

folgt, aus der wir aufgrund der Normalität von $C_+(\overline{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M)$

$$H_{\tau}^{\overline{D}_0} \in \mathcal{L}(V, \|\cdot\|_{C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M)}, C(\overline{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M))$$

erhalten. Die Behauptung (ii) ergibt sich nun aus der Tatsache, daß V gemäß Lemma 6.4 bezüglich $\|\cdot\|_{C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M)}$ dicht in $C_B(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M)$ ist.

(iii) Geben wir uns $\beta \in (\frac{1}{2}(1 + \frac{N}{p}), 1)$ vor, so folgt aus Lemma 1.11, daß für $\alpha \in [0, \beta]$

$$H_{\tau}^{\overline{D}_0} \in \mathcal{L}(X_{\beta}(\tau), C^{\beta-\alpha}([\tau, T], X_{\alpha}(\cdot)))$$

gilt. Wählen wir nun $\mu \in (0, 2\beta - 1 - \frac{N}{p})$, so ist

$$\alpha_1 := \beta - \frac{1+\mu}{2} > \frac{N}{2p}, \quad \alpha_2 := \beta - \frac{\mu}{2} > \frac{1}{2}(1 + \frac{N}{p}),$$

und Lemma 6.3 liefert die Einbettungen

$$X_{\alpha_1}(\cdot) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M), X_{\alpha_2}(\cdot) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M), X_{\beta}(\cdot) \hookrightarrow C^{\frac{1+\mu}{2}}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M),$$

so daß $H_{\tau}^{\overline{D}_0}$ den Raum $X_{\beta}(\tau)$ stetig in die Räume $C^{\frac{1+\mu}{2}}([\tau, T], C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M))$, $C^{\frac{\mu}{2}}([\tau, T], C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M))$ und $C([\tau, T], C^{1+\mu}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M))$ abbildet. Daß daraus gerade

$$H_{\tau}^{\overline{D}_0} \in \mathcal{L}(X_{\beta}(\tau), C^{(1+\mu)}(\overline{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M))$$

folgt, ergibt sich aus der Definition der $C^{(1+\mu)}$ -Norm.

(iv) Wählen wir $\mu \in (0, 1)$ und $X = L_p(\Omega, \mathbb{R}^M)$ mit $p > \frac{N}{1-\mu}$, so gilt weiterhin die Voraussetzung (H1), und aus Lemma 1.5 (i)(a) und Lemma 1.9

(ii) folgt mit $Y = X$, daß

$$K_{\tau}^{\overline{D}_0} \in \mathcal{L}(C(\overline{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M), L_{\infty}([\tau, T], X))$$

gilt, so daß wir wegen $K_{\tau}^{\overline{D}_0} = K_{\tau}[\overline{D}_0 \circ K_{\tau}^{\overline{D}_0} + \text{id}]$ nach erneuter Anwendung von

Lemma 1.5 (i)(a) für alle $\alpha \in (0,1)$

$$K_{\tau}^{\overline{D}_0} \in \mathcal{L}(C(\overline{Q}_{\tau T}, \mathbb{R}^M), C^{1-\alpha}([\tau, T], X_{\alpha}))$$

erhalten. Wählen wir der Reihe nach $\alpha = 1 - \frac{1+\mu}{2}$, $\alpha = 1 - \frac{\mu}{2}$ und $\alpha \in (\frac{1}{2}(\mu+1+\frac{N}{p}), 1)$, so folgt die Behauptung wie in (iii). $\square$

Anschließend an diese Regularisierungseigenschaften von $\dot{H}_{\tau}^{\overline{D}_0}$ wollen wir noch eine wesentliche Positivitätsaussage über diesen Operator beweisen.

6.6 Lemma:

Die Bedingung (A1) sei erfüllt, wobei $A_0(t)$ für alle $t \in (0, T)$ stark quasipositiv sei. Setzen wir wieder $X = L_p(\Omega, \mathbb{R}^M)$ mit $p > N$, so ist $U_{\overline{D}_0}(t, \tau)$ für $0 \leq \tau < t \leq T$ und $\alpha \in (\frac{1}{2}(1 + \frac{N}{p}), 1)$ als Operator von X nach X_{α} stark positiv.

Beweis:

Nach dem Satz von Hille-Yosida ist $D_0(T) - A(T)$ Erzeuger einer analytischen Halbgruppe $U(s) := e^{s[D_0(T) - A(T)]}$, $s \geq 0$, in $\mathcal{L}(X)$. Setzen wir

$$A(s) := A(T), \quad D_0(s) := D_0(T) \quad \forall s \geq T,$$

so wird der Evolutionsoperator $U_{\overline{D}_0}$ für $s \geq T$ durch

$$U_{\overline{D}_0}(s, \tau) := \begin{cases} U(s-T)U_{\overline{D}_0}(T, \tau) & \forall \tau \in [0, T] \\ U(s-\tau) & \forall \tau \in [T, s] \end{cases}$$

kanonisch fortgesetzt, wobei $U_{\overline{D}_0}$ alle bislang bewiesenen Eigenschaften behält. Wählen wir ein beliebiges $x \in \dot{P}$, so gibt es (vgl. Lemma 6.8

(i)) eine Folge $x_n \in C_0^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}_+^M)$ mit $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. Da $u_n := \dot{H}_{\tau}^{\overline{D}_0} x_n$ nach Satz 6.2 nichtnegativ ist, folgt für $\hat{T} > T$ nach Lemma 6.5 (i), daß auch $u := \dot{H}_{\tau}^{\overline{D}_0} x \in C^{(2+\mu)_0}_{(Q_{\tau \hat{T}}, \mathbb{R}^M)}$ nichtnegativ ist und den Gleichungen

$$(6.6.1) \quad \begin{cases} u_t + A(\cdot, \cdot, D)u = A_0 u & \text{in } Q_{\tau \hat{T}} \\ B(\cdot, D)u = 0 & \text{auf } S_{\tau \hat{T}} \end{cases}$$

genügt. Wir wollen zunächst

$$(6.6.2) \quad u(s, t) \in \overset{0}{\mathbb{R}}_+^M \quad \forall s \in \Omega$$

nachweisen. Wegen $u \in C([\tau, \bar{T}], X)$ und $u(\tau) > 0$ gibt es eine Zahl $\sigma \in (\tau, t)$ mit $u(\sigma) > 0$, so daß aus (6.6.1) nach Satz 6.2 (ii) folgt, daß die Menge

$$J_+ := \{i \in \{1, \dots, M\} / u_i(s, t) > 0 \quad \forall s \in \Omega\}$$

nichtleer ist. Nehmen wir an, auch $J_0 := \{1, \dots, M\} \setminus J_+$ sei nichtleer, so gibt es nach Voraussetzung Indizes $i \in J_+$ und $k \in J_0$ mit $a_0^{ki}(t) > 0$, und nach Satz 6.2 (ii) verschwindet u_k auf $\bar{Q}_{\tau t}$ identisch, was wegen

$$0 = \left[\frac{\partial}{\partial t} + A^k(\cdot, t, D) \right] u_k(t) = \sum_{j=1}^M (a_0^{kj} u_j)(t) \geq (a_0^{ki} u_i)(t) > 0$$

zum Widerspruch führt. Somit ist J_0 leer und (6.6.1) nachgewiesen.

Wir setzen nun für $n \in \mathbb{N}$

$$A_n := \{y \in X_\alpha / y \leq n u(t)\}$$

und zeigen, daß

$$(6.6.3) \quad X_\alpha = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

gilt. Wählen wir $y \in X_\alpha \hookrightarrow C_B^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M)$ beliebig, so gibt es für diejenigen Indizes $k \in \{1, \dots, M\}$, für die $\delta_k = 1$ ist, nach Satz 6.2 (ii) wegen (6.6.1) eine Konstante $\gamma_k(y) > 0$ mit

$$(6.6.4) \quad \gamma_k \leq \gamma_k(y) u_k(t).$$

Falls δ_k verschwindet, können wir (6.6.4) ebenfalls nachweisen. Da in diesem Fall nämlich

$$\frac{\partial u_k}{\partial \beta^k}(s, t) < 0 \quad \forall s \in \partial\Omega$$

gilt, können wir eine positive Konstante

$$\eta_k(y) > \max_{s \in \partial\Omega} \frac{\partial \gamma_k}{\partial \beta^k}(s) / \frac{\partial u_k}{\partial \beta^k}(s, t)$$

wählen, so daß

$$\frac{\partial}{\partial \beta^k} (\eta_k u_k(t) - \gamma_k)(s) < 0 \quad \forall s \in \partial\Omega$$

gilt. Da $\partial\Omega$ kompakt ist, folgt für eine hinreichend kleine Zahl $\varepsilon > 0$

$$(\eta_k u_k(t) - \gamma_k)(s) \geq 0 \quad \forall s \in \Omega \quad \text{mit } d(s, \partial\Omega) < \epsilon.$$

Nun können wir wegen (6.6.2) eine positive Konstante

$$\xi_k(y) \geq \max \left\{ \frac{\gamma_k(s)}{u_k(s,t)} \mid s \in \Omega, \quad d(s, \partial\Omega) \geq \epsilon \right\}$$

wählen, so daß für $\gamma_k(y) = \max \{ \eta_k(y), \xi_k(y) \}$ die Ungleichung (6.6.4) folgt. Mit $\gamma(y) = \max_{1 \leq k \leq M} \gamma_k(y)$ ergibt sich jetzt $y \leq \gamma(y)u(t)$, womit wir insbesondere (6.6.3) bewiesen haben. Aus dem Baire'schen Kategoriensatz folgt nun, daß $k_0 \in \mathbb{N}$, $y_0 \in X_\alpha$ und $\rho > 0$ mit

$$y_0 + \rho \mathbb{B}_{X_\alpha} \subset A_{k_0}$$

existieren, so daß

$$u(t) + \frac{\rho}{k_0 + \gamma(-y_0)} \mathbb{B}_{X_\alpha} \subset P_\alpha$$

gilt. Also ist $u(t) \in P_\alpha$. $\square$

Unter den Voraussetzungen dieses Lemmas besitzt $U_{D_0}(T, 0)$ nach Theorem 0.4 zu $\rho := r(U_{D_0}(T, 0)) > 0$ einen Eigenvektor $x_0 \in P_\alpha$, für den nach Lemma 6.5 gilt, daß $(x_0, 0)$ (A, B) -verträglich ist und

$$u := \text{sign}(1-\rho) H_{O^+}^{\overline{D_0}} x_0 \in C^{(2+\mu_0)}(\overline{Q_T}, \mathbb{R}^M)$$

für $\rho \neq 1$ den folgenden Bedingungen genügt:

$$u_t + A(.,., D)u = A_0 u \quad \text{in } Q_T$$

$$B(., D)u = 0 \quad \text{auf } S_T$$

$$u(0) = \text{sign}(1-\rho) x_0 = \frac{\text{sign}(1-\rho)}{\rho} U_{D_0}(T, 0) x_0 > \text{sign}(1-\rho) U_{D_0}(T, 0) x_0 = u(T).$$

Wir wollen nun eine für praktische Zwecke sehr nützliche Umkehrung dieser Aussage beweisen.

6.7 Lemma:

Unter den Voraussetzungen von Lemma 6.6 existiere eine Abbildung

$u \in C^{(2)}(Q_T, \mathbb{R}^M) \cap C(\overline{Q_T}, \mathbb{R}^M)$, die den Ungleichungen

$$(6.7.1) \quad \begin{cases} u_t + A(.,.,D)u \geq A_0 u & \text{in } Q_T \\ B(.,D)u \geq 0 & \text{auf } S_T \\ u(0) \geq u(T) & \text{auf } \overline{\Omega} \end{cases}$$

genügt, von denen mindestens eine keine Gleichung sei.

Dann ist der Spektralradius $r(U_{D_0}(T,0))$ kleiner als 1, falls $u(0) \geq 0$ gilt, während er im umgekehrten Fall $(u(0) \not\geq 0)$ größer als 1 ist.

Beweis:

Wir setzen $x := u(0) \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{M_1})$ und zeigen, daß

$$(6.7.2) \quad U_{D_0}(T,0)x < x$$

gilt. Für alle $k \in \{1, \dots, M\}$ mit $\delta_k = 0$ wird mit

$$\Omega_j := \{s \in \Omega / d(s, \partial\Omega) > \frac{1}{j}\}$$

für $s \in \overline{\Omega}$ durch

$$x_k^j(s) := \max \{x_k(s), 0\} \frac{c(s, \Omega \setminus \Omega_{j+1})}{d(s, \Omega_j) + d(s, \Omega \setminus \Omega_{j+1})} + \min \{x_k(s), 0\}$$

eine Folge $x_k^j \in C_{B^k}(\overline{\Omega})$ mit $x_k^j \leq x_k$ und $\|x_k^j - x_k\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ definiert.

Setzen wir $x_i^j = x_i \quad \forall j \in \mathbb{N}$ für alle übrigen Indizes $i \in \{1, \dots, M\}$,

so folgt für

$$v^j := H_0^{\overline{D_0}} \left(\sum_{k=1}^M x_k^j e_k^{M_1} \right) \in C^{(2+)}_0(Q_T, \mathbb{R}^{M_1}) \cap C(\overline{Q_T}, \mathbb{R}^{M_1})$$

aus den Ungleichungen

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + A(.,.,D) \right] (u - v^j) &\geq A_0(u - v^j) && \text{in } Q_T \\ B(.,D) (u - v^j) &\geq 0 && \text{auf } S_T \\ (u - v^j)(0) &\geq 0 && \text{auf } \overline{\Omega} \end{aligned}$$

nach Satz 6.2 (i), daß $v^j \leq u$ gilt, und aus Lemma 6.5 (i) ergibt sich

$v := H_0^{\overline{D_0}} x \leq u$ auf Q_T . Falls $v(T) < u(T)$ ist, erhalten wir (6.7.2) un-

mittelbar aus der letzten Ungleichung in (6.7.1). Im anderen Falle folgt

nach Satz 6.2 (ii) für beliebig kleines $\tau \in (0, T)$ aus den Ungleichungen

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + A(.,.,D) \right] (u - v) &\geq A_0(u - v) && \text{in } Q_{\tau T} \\ B(.,D) (u - v) &\geq 0 && \text{auf } S_{\tau T} \\ (u - v)(\tau) &\geq 0 && \text{auf } \overline{\Omega} \end{aligned}$$

daß $u = v$ auf $\overline{Q}_{tT}$ gilt, so daß in den ersten beiden Ungleichungen von (6.7.1) ein Gleichheitszeichen steht und somit $u(0) > u(T) \geq v(T)$ folgt. Damit ist (6.7.2) nachgewiesen, und die Behauptung ergibt sich aus Theorem 0.4 und Lemma 6.6. $\square$

Da für Abbildungen u , die bezüglich der Raumvariablen s konstant sind, sämtliche Raumableitungen verschwinden, werden die Ungleichungen (6.7.1) erheblich einfacher, wenn man derartige Abbildungen betrachtet. Am leichtesten ist es natürlich, (6.7.1) an Abbildungen u , die *in allen Variablen konstant* sind, zu überprüfen. Unter den Voraussetzungen von Lemma 6.6 erhalten wir dann eine hinreichende Bedingung für $r(u_0(T, 0)) < 1$, wenn die Ungleichungen

$$A_0(\cdot, \cdot) \xi^+ \leq 0, \quad b_0^k \geq 0 \quad \forall \quad 1 \leq k \leq M,$$

für irgendeinen Vektor $\xi^+ \in \mathring{\mathbb{R}}_+^{M+1}$ erfüllt sind, wobei in diesem Ungleichungssystem nicht nur Gleichheitszeichen auftreten dürfen. Gibt es auf der anderen Seite einen Vektor $\xi^- \not\geq 0$, für den die Ungleichungen

$$A_0 \xi^- \leq 0, \quad b_0^k \xi_k^- \geq 0 \quad 1 \leq k \leq M$$

nicht sämtlich zu Gleichungen ausarten, so ist der Spektralradius größer als 1. Besonders prägnante Bedingungen ergeben sich mit $\xi^+ = \sum_{i=1}^M e_i^M$ bzw. $\xi^- = -e_1^M$. Beim reinen Neumann-Problem ($b_0^k = 0 \quad \forall \quad 1 \leq k \leq M$) ist die Sache offensichtlich am einfachsten, da lediglich Vektoren $\xi^+ \gg 0$ bzw. $\xi^- \not\geq 0$ mit $A_0 \xi^\pm < 0$ zu suchen sind.

In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, daß im Falle einer *konstanten* stark quasipositiven Matrix A_0 die Bedingungen

1) Man zeigt leicht, daß die Ungleichung $A_0 \xi \leq 0$ auf $\partial \mathring{\mathbb{R}}_+^M$ nur die triviale Lösung $\xi = 0$ besitzt, da $A_0(t)$ für $t \in (0, T)$ stark quasipositiv ist.

(a) Es gibt ein $\xi \in \mathbb{R}_+^M \setminus \{0\}$ mit $A_0 \xi < 0$ (bzw. $A_0 \xi \leq 0$ bzw. $A_0 \xi > 0$).

(b) $\omega_0 := \max \{ \operatorname{re} \lambda / \lambda \in \sigma_p(A_0) \}$ ist der einzige Eigenwert von A_0 mit zugehörigem positiven Eigenvektor, und es gilt $\omega_0 < 0$ (bzw. $\omega_0 \leq 0$ bzw. $\omega_0 > 0$).

(c) Die triviale Lösung des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems $\dot{\xi} = A_0 \xi$ ist stabil (bzw. schwach stabil bzw. instabil).

äquivalent sind. Da e^{tA_0} für $t > 0$ stark positiv in $\mathbb{R}^M$ ist (vgl.

Bemerkung 5.15 (iii)), kann man diese Aussagen wegen

$$\frac{d}{dt} e^{tA_0} \xi = e^{tA_0} A_0 \xi \quad \forall t > 0$$

leicht mit Theorem 0.4 und Lemma 1.13 beweisen (wähle dort $X = \mathbb{R}^M$,

$A = 0$ und $G = A_0$).

Sind A und A_0 von t unabhängig, so kann man wiederum Lemma 1.13 anwenden, um mit Hilfe von Lemma 6.6 aus der starken Quasipositivität von A_0 die Existenz eines kleinsten Eigenwertes ω_0 von

$$A(., D)x = A_0 x + \lambda x \quad \text{in } \Omega$$

$$B(., D)x = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

mit zugehöriger positiver Eigenfunktion x_0 (die nach Theorem 0.4 bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt ist) zu erhalten. Falls ω_0 ungleich Null ist, genügt auch

$$u(s, t) := \operatorname{sign} \omega_0 e^{-\omega_0 t} x_0(s)$$

den Ungleichungen (6.7.1), und es folgt

$$\operatorname{sign}(1 - r(U_D(T, 0))) = \operatorname{sign} \omega_0.$$

Aus diesen Bemerkungen ergeben sich mit Lemma 1.13 sämtliche Behauptungen, die im Anschluß an Theorem 4 im Zusammenhang mit der Bedingung (Stab;

$(C_j)_{0 \leq j \leq N}$) aufgestellt wurden.

Definieren wir nun unter der Voraussetzung (A1) die Menge $M = L_p(\Omega, ID)$, so ist M trivialerweise konvex und abgeschlossen in X .

6.8 Lemma:

Es sei (A1) vorausgesetzt. Dann gilt:

- (i) $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{D})$ ist bezüglich $\|\cdot\|$ dicht in $\mathbb{M}$.
- (ii) Für jedes $x \in \mathbb{M}$ läßt sich $x' \in (x - \mathbb{M})^*$ kanonisch mit einer Abbildung $x' \in L_{p,1}(\Omega, \mathbb{R}^M)$ identifizieren, für die
- $$x'(s) \in N(x(s)) \quad \forall s \in \Omega$$

gilt.

- (iii) Jede Abbildung $x \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{D})$ genügt für alle $s \in \Omega$ und $v \in N(x(s))$ den Gleichungen

$$(v \mid D_i x(s))_{\mathbb{R}^M} = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq N.$$

Beweis:

- (i) Da der in [, Lemma 7.1] geführte Beweis auch für unbeschränkte Mengen $\mathbb{D}$ richtig ist, können wir ihn wörtlich übernehmen.
- (ii) Es sei $x \in \mathbb{M}$ und $x' \in (x - \mathbb{M})^*$. Dann können wir x' kanonisch mit einer Abbildung $x' \in L_{p,1}(\Omega, \mathbb{R}^M)$ identifizieren und einen Lebesgue'schen Punkt $s_0 \in \Omega$ der Abbildung x' und der Funktion

$$(s \mapsto (x'(s) \mid x(s))) \in L_1(\Omega)$$

betrachten. Wählen wir $\xi \in \mathbb{D}$ beliebig und eine Folge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Würfeln positiven Maßes mit $s_0 \in C_n \subset \Omega$

und $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{meas}(C_n) = 0$, so sind die Abbildungen

$$x_n := \chi_{C_n} \xi + (1 - \chi_{C_n}) x \in \mathbb{M},$$

da $\mathbb{D}$ konvex ist, und es folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{1}{\text{meas}(C_n)} \langle x', x_n - x \rangle \\ &= \left(\frac{1}{\text{meas}(C_n)} \int_{C_n} x'(s) ds \mid \xi \right) - \frac{1}{\text{meas}(C_n)} \int_{C_n} (x'(s) \mid x(s)) ds, \end{aligned}$$

aus der sich für $n \rightarrow \infty$

$$(x'(s_0) \mid \xi - x(s_0)) \leq 0$$

ergibt, da s_0 Lebesgue'scher Punkt der beiden Abbildungen ist.

Somit liegt $x'(s_0)$ in $N(x(s_0))$, denn $\xi \in \mathbb{D}$ war beliebig gewählt. Die Behauptung folgt nun aus der Tatsache, daß außerhalb einer gewissen Nullmenge jeder Punkt von Ω Lebesgue'scher Punkt der beiden Abbildungen ist. Wählt man einen Repräsentanten von x' , der auf dieser Nullmenge verschwindet, so hat man eine geeignete Abbildung gefunden.

(iii) Da $N(\xi)$ für $\xi \in \mathbb{D}^\circ$ nur aus dem Nullpunkt besteht, brauchen wir nur Punkte $s \in \Omega$ zu betrachten, für die $x(s) \in \partial \mathbb{D}$ gilt. Ist $s \in \Omega$ ein solcher Punkt und $v \in N(x(s))$ beliebig, so folgt für $i \in \{1, \dots, N\}$ und $h \in (0, d(s, \partial \Omega))$ aus

$$x(s \pm h e_i) = x(s) \pm h D_i x(s) + o(h)$$

nach Skalarmultiplikation mit v und Division durch h die Ungleichung

$$\pm(v \mid D_i x(s)) \leq - (v \mid \frac{o(h)}{h})$$

und mit $h \rightarrow 0^+$ folgt

$$\pm(v \mid D_i x(s)) \leq 0 \quad . \quad \square$$

Wir wollen nun die Bedingungen (A1)-(A4) voraussetzen und nachweisen, daß die grundlegenden Voraussetzungen unserer allgemeinen Sätze über Evolutionsgleichungen erfüllt sind, wenn wir von nun an mit σ_0 aus Theorem 4

$$p > \frac{N\sigma_0}{2-\sigma_0}, \quad \alpha \in (\frac{1}{2}(1 + \frac{N}{p}), \frac{1}{\sigma_0})$$

und $Y = C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M)$ fest wählen und für $x \in \mathbb{M}_Y$

$$[f_0(t, x)](s) := f(s, t, x(s), D_x(s)) \quad \forall (s, t) \in \bar{Q}_T$$

definieren. Die Tatsache, daß wir den Buchstaben f für $\lambda \in \mathbb{R}_+$ auch zur Bezeichnung von

$$f(t, x, \lambda) := D_0(t)x + \lambda f_0(t, x)$$

benutzen, sollte möglichst keine Verwirrung stiften.

Man beachte ferner, daß $P_Y = C^1_+(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M)$ erzeugend in Y ist.

6.9 Lemma:

Unter den Voraussetzungen (A1)-(A4) sind die Bedingungen (H1), (H2), (H3), (K), (L) und (R) mit $\Lambda = \mathbb{R}_+$ erfüllt.

Beweis:

Daß (H1) und (K) gelten, haben wir bereits festgestellt. Trivialerweise folgt (H2) mit Lemma 6.3 aus (A2), während sich (R) und (L) aus (A2) und (A3) ergeben. Da wir auch schon (H3.1) als trivial erkannt haben, wenden wir uns zum Nachweis von (H3) sofort der Bedingung (H3.2) zu und bemerken zunächst, daß es wegen Lemma 6.8 (i) und Lemma 1.11 reicht, für jedes $x \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{D})$ und $\tau \in [0, T]$ die Inklusion $H_\tau x(\overline{Q}_T) \subset \mathbb{D}$ zu zeigen. Während für $\mathbb{D} = \mathbb{R}^M$ gar nichts zu zeigen ist, folgt dies für $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+^M$ aus Satz 6.2. Für den dritten Fall, den die Voraussetzung (A1) zuläßt, wurde die Aussage in [, Lemma 7.3] bewiesen. Zum Beweis von (H3.3) können wir Lemma 2.8 benutzen, da $\mathbb{M}$ konvex ist, und betrachten daher $(t, x) \in [0, T] \times M_{\alpha_0}$ und $x' \in (x - \mathbb{M})^*$. Nach der in Lemma 6.8 (ii) beschriebenen Identifikation folgt aus (A4) und Lemma 6.8 (iii), daß die Ungleichungen

$$(6.9.1) \quad \sup_{\xi \in \mathbb{D}} (x'(s) \mid \xi - x(s)) \leq 0 \quad \forall s \in \Omega$$

und

$$(6.9.2) \quad (x'(s) \mid f(s, t, x(s), Dx(s))) \leq 0 \quad \forall s \in \Omega$$

gelten. Ist die Voraussetzung (ii) in (A1) erfüllt, so folgt aus (6.9.1) mit Lemma 0.1 (ii) für

$$\sigma := \min \{a_0^{kk}(s, t) \mid (s, t) \in \overline{Q}_T, 1 \leq k \leq M\}$$

die Ungleichung

$$(6.9.3) \quad (x'(s) \mid A_0(s, t)x(s)) \leq (x'(s) \mid \text{diag } A_0(s, t)x(s)) \leq \sigma (x'(s) \mid x(s)) = 0$$

$$\forall s \in \Omega,$$

während man unter der Voraussetzung (iii) wegen $0 \in \mathbb{D}$ und $a_0^{11} \leq 0$ aus (6.9.1) die Ungleichung

$$(6.9.4) \quad (x'(s) | A_0(s, t)x(s)) = a_0^{11}(s, t)(x'(s) | x(s)) \leq 0 \quad \forall s \in \Omega$$

erhält. Integration von (6.9.2) und (6.9.3) bzw. (6.9.4) über Ω liefert die Voraussetzung (H3.3). $\square$

Aus diesem Lemma folgt nun, daß es unter den Voraussetzungen (A1)-(A4) nach Theorem 2.7 und Lemma 2.3 zu jedem Datenpaar $(x, +) \in C_B^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M) \times \mathbb{R}_+$ eine Zahl $T'(\|x\|_{X_{\alpha_0}}, \lambda) \in (0, T]$ gibt, so daß $CP(x, \lambda)$ eine eindeutig bestimmte lokale starke X_{α_0} -Lösung u besitzt, für die, falls sie nicht auf $[0, T]$ fortsetzbar ist, am rechten Rand T^* ihres maximalen Existenzintervalles die Gleichung

$$\limsup_{t \rightarrow T^*} \|u(t)\|_{C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M)} = \infty$$

gilt. Da $A(.,., D)$ und $B(., D)$ Diagonaloperatoren sind, kann man den in [10, Lemma 4.2] geführten Beweis wörtlich übernehmen, um zu zeigen, daß jede starke X_{α_0} -Lösung von $CP(x, \lambda)$ bereits eine reguläre Lösung von $(ARWP)_{x, \lambda}$ ist. Dabei spielt es keine Rolle, daß wir f bezüglich t nur in $(0, T]$ Hölderstetig vorausgesetzt haben (vgl. Lemma 6.11). Somit ist Theorem 1 bereits bewiesen.

Um die Theoreme 2, 3 und 5 nachweisen zu können, benötigen wir noch ein Lemma.

6.10 Lemma:

Mit $ID = \mathbb{R}^M$ oder $ID = \mathbb{R}_+^M$ seien (A2) und (A6) vorausgesetzt, und wir setzen für $x \in Y$

$$[D_\infty(t)x](s) := c_0(s, t)x(s) + \sum_{j=1}^N c_j(s, t)D_j x(s) \quad \forall (s, t) \in \bar{Q}_T.$$

Dann gilt:

- (i) $D_\infty \in C^{\frac{\mu_0}{2}}([0, T], \mathcal{L}(Y, X))$
- (ii) $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sup_{(t, x) \in [0, T] \times {}_\rho B_Y(+)} \frac{\|f_0(t, x) - D_\infty(t)x\|}{\rho} = 0.$

Beweis:

(i) trivial.

(ii) Setzen wir

$$r(s, t, \xi, \eta) := f(s, t, \xi, \eta) - c_0(s, t)\xi - \sum_{j=1}^N c_j(s, t)\eta^j$$

und wählen zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl $R(\varepsilon)$ mit

$$\sup_{(s, t) \in \overline{Q}_T} |r(s, t, \xi, \eta)| \leq \varepsilon |(\xi, \eta)| \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}_{(+)}^M \times (\mathbb{R}^M)^N \setminus R B_{(\mathbb{R}^M)^{N+1}}$$

so können wir mit

$$c(\varepsilon) := \max_{\substack{(s, t) \in \overline{Q}_T \\ (\xi, \eta) \in [\mathbb{R}_{(+)}^M \times (\mathbb{R}^M)^N] \cap R B_{(\mathbb{R}^M)^{N+1}}}} |r(s, t, \xi, \eta)|$$

für alle $(s, t, \xi, \eta) \in \overline{Q}_T \times \mathbb{R}_{(+)}^M \times (\mathbb{R}^M)^N$

$$|r(s, t, \xi, \eta)| \leq \varepsilon |(\xi, \eta)| + c(\varepsilon)$$

abschätzen und erhalten für $\rho > 0$ und $x \in \rho B_Y^{(+)}$ die Ungleichung

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|r(\cdot, t, x(\cdot), Dx(\cdot))\|_{C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M)} \leq \varepsilon \rho + c(\varepsilon),$$

aus der wegen $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M) \hookrightarrow X$ die Behauptung folgt, da ε beliebig klein gewählt werden kann. $\square$

Unter den Voraussetzungen dieses Lemmas ist natürlich insbesondere (ALC) mit $D(\cdot, \lambda) = D_0 + \lambda D_\infty$ erfüllt. Somit sind nach Lemma 6.9 unter den Voraussetzungen der Theoreme 2, 3 und 5 die Sätze 4.4, 4.5 und 4.7 anwendbar. Benutzt man wieder Lemma 2.3 und die bereits erwähnte Tatsache, daß jede starke X_{α_0} -Lösung von (E) eine Lösung von (RWP) ist, so ergeben sich die Behauptungen der Theoreme 2, 3 und 5, wobei wir streng genommen noch zeigen müßten, daß (P2) aus $(A4)_+$ folgt, da wir bislang nicht nachgewiesen haben, daß $(A4)$ im Falle $ID = \mathbb{R}_+^M$ wirklich äquivalent zu $(A4)_+$ ist. Der Beweis ist so einfach, daß wir ihn hier fortlassen. Statt dessen wollen wir die damit verwandte und fast ebenso triviale Aussage beweisen, daß f_0

in X_{α_0} bzw. P_{α_0} quasiwachsend ist, falls die Abbildung f aus (A2) in $\mathbb{R}^M$ bzw. $\mathbb{R}_+^M$ außerhalb der Diagonalen wachsend ist.

Betrachten wir also für $D = X_{\alpha_0}$ oder $D = P_{\alpha_0}$ zwei Abbildungen $x, y \in D$ mit $x \leq y$. Jedes Funktional $x' \in P^* \cap \{y-x\}^0$ läßt sich nach Lemma 6.8 (ii) mit einer $L_{p_1}(\Omega, \mathbb{R}^M)$ -Abbildung identifizieren, für die (vgl. Lemma 0.1 (ii))

$$x'(s) \in \mathbb{R}_+^M, \quad (x'(s) \mid (y-x)(s)) = 0 \quad \forall s \in \Omega$$

gilt. Da $y-x$ nichtnegativ ist, folgt daraus sogar für jeden Index $i \in \{1, \dots, M\}$

$$x'_i(s)(y_i - x_i)(s) = 0 \quad \forall s \in \Omega$$

und ferner

$$\nabla y_i(s) = \nabla x_i(s) \quad \forall s \in \Omega_i^0 := (y_i - x_i)^{-1}(\{0\}),$$

so daß sich für $s \in \Omega_i^0$ die Ungleichung

$$h_i(s, t) := f_i(s, t, y(s), Dy(s)) - f_i(s, t, x(s), Dx(s)) \geq 0$$

ergibt, falls f außerhalb der Diagonalen wachsend ist. Da in $\Omega \setminus \Omega_i^0$ die Funktion x'_i verschwindet, erhalten wir die Ungleichung

$$\langle x', f_0(t, y) - f_0(t, x) \rangle = \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_i^0} x'_i(s) h_i(s, t) ds \geq 0,$$

aus der folgt, daß f_0 in D quasiwachsend ist.

Da man mit völlig analogen Überlegungen zeigen kann, daß die durch

$$[G(t)x](s) := (A_0 + C_0)(s, t)x(s) + \sum_{j=1}^N C_j(s, t)D_j x(s)$$

definierte Abbildung in X_{α_0} quasipositiv ist, falls

$$A_0 + C_0 \geq \text{diag}(A_0 + C_0), \quad C_j = \text{diag } C_j \quad 1 \leq j \leq N$$

gilt, ergibt sich Theorem 4 offensichtlich unmittelbar aus Satz 4.6.

Auch der Beweis von Theorem 6 bereitet keine Schwierigkeiten, da man aus (A8) mit dem Mittelwertsatz die in Satz 4.9 angenommene Differenzierbarkeitsvoraussetzung ($M = X$) erhält. Benutzt man Satz 4.9 für $\alpha = \alpha_0$ und $\beta = 0$, so ergibt sich Theorem 6 wegen

$$C_B^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M) \hookrightarrow X_{\alpha_0} \hookrightarrow C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M), \quad C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M) \hookrightarrow X$$

und

$$r(U_{\bar{G}}(T, 0)) = \rho((G_j)_{0 \leq j \leq N}) < 1.$$

Es bleiben die Theoreme 7-9 zu zeigen.

Die Voraussetzungen dieser Theoreme enthalten die Bedingung (A5) entweder explizit oder über die Voraussetzung (A6) implizit. Für ihren Beweis benötigen wir noch einen Regularitäts- und Stetigkeitssatz über den Lösungsoperator S , der unter den Voraussetzungen (A1)-(A5) stets auf $M_{\alpha_0} \times \mathbb{R}_+$ existiert (vgl. Lemma 3.3).

6.11 Lemma:

Unter den Voraussetzungen (A1) - (A5) gilt:

$$S \in C(M_{\alpha_0} \times \mathbb{R}_+, C^{(2)}(\bar{Q}_T, \mathbb{R}^M) \cap C^{(1)}(\bar{Q}_T, \mathbb{D}))$$

Beweis:

Für $\mu \in (0, \min\{\mu_0, 2\alpha_0 - \frac{N}{p}\})$ bildet $H_{\alpha_0}^{\bar{D}_0}$ nach Lemma 6.5 (iii) den Raum X_{α_0} stetig nach $C^{(1+\mu)}(\bar{Q}_T, \mathbb{R}^M)$ ab, während S die Menge $M_{\alpha_0} \times \mathbb{R}_+$ nach Satz 3.1 (ii)(b) und Lemma 3.3 stetig und beschränkt¹⁾ nach

$C([0, T], X_{\alpha_0})$ abbildet. Da aus Lemma 6.5 (iv) und der Stetigkeit von f sofort folgt, daß $K_{\alpha_0}^{\bar{D}_0} F_{\alpha_0}$ als Operator von $C^{(1)}(\bar{Q}_T, \mathbb{D})$ nach $C^{(1+\mu)}(\bar{Q}_T, \mathbb{R}^M)$ stetig und beschränkt¹⁾ ist, ergibt sich aus der Einbettung (vgl. Lemma 6.3) von $C([0, T], X_{\alpha_0})$ in $C^{(1)}(\bar{Q}_T, \mathbb{R}^M)$ und der Identität

$$S(x, \lambda) = H_{\alpha_0}^{\bar{D}_0} x + \lambda K_{\alpha_0}^{\bar{D}_0} F_{\alpha_0}(S(x, \lambda)),$$

daß S die Menge $M_{\alpha_0} \times \mathbb{R}_+$ stetig und beschränkt nach $C^{(1+\mu)}(\bar{Q}_T, \mathbb{R}^M)$ abbildet. Betrachten wir nun eine Folge

$(x_n, \lambda_n) \in M_{\alpha_0} \times \mathbb{R}_+$, die in $X_{\alpha_0} \times \mathbb{R}$ gegen ein $(x_0, \lambda_0) \in M_{\alpha_0} \times \mathbb{R}_+$ konvergiert, so konvergiert also $S(x_n, \lambda_n)$ in $C^{(1+\mu)}(\bar{Q}_T, \mathbb{R}^M)$ gegen $u_0 = S(x_0, \lambda_0)$, und somit ist die Folge $g_n := \bar{D}_0 S(x_n, \lambda_n) + \lambda_n F_{\alpha_0}(S(x_n, \lambda_n))$

¹⁾ d.h.: Bilder beschränkter Mengen sind beschränkt.

in $C^{(u)}(Q_T, \mathbb{R}^M)$ beschränkt und in $C(\overline{Q}_T, \mathbb{R}^M)$ gegen

$$g_0 := \overline{D}_0 S(x_0, \lambda_0) + \lambda_0 F_0(S(x_0, \lambda_0))$$

konvergent. Wählen wir $v \in (0, u)$, $\tau \in (0, T)$ und

$\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+, [0, 1])$ mit

$$\zeta(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \in [0, \frac{\tau}{2}] \\ 1 & \forall t \geq \tau \end{cases}$$

so sind die Abbildungen $u_n := \zeta S(x_n, \lambda_n)$ reguläre Lösungen von

$$u_t + A(\cdot, \cdot, D)u = \zeta S(x_n, \lambda_n) + \zeta g_n =: h_n \quad \text{in } Q_T$$

$$B(\cdot, D)u = 0 \quad \text{auf } S_T$$

$$u(0) = 0 \quad \text{auf } \overline{\Omega},$$

und aufgrund der bekannten Interpolationsungleichung

$$H_{v,s}^{\overline{Q}_T, \mathbb{R}^M}(h) + H_{\frac{v}{2}, t}^{\overline{Q}_T, \mathbb{R}^M}(h) \leq [2 \|h\|_{C(\overline{Q}_T, \mathbb{R}^M)}]^{1-\frac{v}{2}} [H_{v,s}^{\overline{Q}_T, \mathbb{R}^M}(h) + H_{\frac{v}{2}, t}^{\overline{Q}_T, \mathbb{R}^M}(h)]^{\frac{v}{2}}$$

konvergiert die Folge h_n in $C^{(v)}(\overline{Q}_T, \mathbb{R}^M)$ gegen h_0 . Da $(0, h_n)$ wegen $h_n(\cdot, 0) = 0$ ferner (A, B) -verträglich ist, ergibt sich daraus nach Satz 6.1 die Konvergenz von u_n gegen u_0 in $C^{(2+v)}(\overline{Q}_T, \mathbb{R}^M)$, woraus wir schließen können, daß $S(x_n, \lambda_n)$ in $C^{2+v}(Q_T, \mathbb{R}^M)$ gegen $S(x_0, \lambda_0)$ konvergiert, indem wir τ beliebig klein wählen. Hieraus folgt mit dem bereits Bewiesenen die Behauptung. $\square$

Falls A , A_0 und f unter den Voraussetzungen dieses Lemmas bezüglich der Zeitvariablen T -periodisch sind und die in § 5. definierte Menge Σ_0 mit der $X_{\alpha_0} \times \mathbb{R}$ -Topologie versehen wird, so kann man sogar

$$S \in C(\Sigma_0, C^{(2)}(\overline{Q}_T, \mathbb{R}^M))$$

zeigen, da für $(x_n, \lambda_n) \in \Sigma_0$ wegen

$$x_n = S(x_n, \lambda_n)(T) \in C_B^{2+v}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M)$$

und der Periodizität von A , A_0 und f

$$\begin{aligned}
A(.,0,D)x_n &= A(.,T,D)S(x_n,\lambda_n)(T) \\
&= g_n(.,T) - \frac{\partial}{\partial t} S(x_n,\lambda_n)(.,T) \\
&= g_n(.,0) - \frac{\partial}{\partial t} S(x_n,\lambda_n)(.,0)
\end{aligned}$$

gilt und somit (x_n, g_n) im Beweis von Lemma 6.11 (A,B)-verträglich ist, da die Zeitableitungen der Komponenten mit Dirichlet-Randbedingungen auf $\partial\Omega$ verschwinden. Wie man sieht, benötigt man die Periodizität von A , A_0 und f für diese Stetigkeitsaussage gar nicht, wenn $\delta_k \neq 0$ für alle $k \in \{1, \dots, M\}$ gilt.

Wir kommen nun zum Beweis der Theoreme 7-9.

Theorem 7 folgt unmittelbar aus Satz 5.6, wenn man die Gleichungen

$$r(\underline{D}_0(T,0)) = \rho(0),$$

$$[D_2^+ f_0(t,x)y](s) = D_\xi f(s,t,x(s),Dx(s))y(s) + \sum_{j=1}^N D_{\eta^j} f(s,t,x(s),Dx(s))D_j y(s)$$

$$\forall (s,t) \in \bar{Q}_T$$

und die Einbettung $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^M) \hookrightarrow X$ berücksichtigt, da (G) mit $\sigma_0 = 1$ aus (A5) folgt und im Zusammenhang mit Theorem 4 bereits nachgewiesen wurde, daß f_0 quasiwachsend in P_{α_0} ist. Die Stetigkeitsaussage über $\underline{u}$ ergibt sich aus der von Satz 5.5, wenn man das Stetigkeitsresultat von Lemma 6.11 in die Gleichung $\underline{u}(\lambda) = S(\underline{u}(\lambda)(0), \lambda)$ einbringt.

Der Beweis von Theorem 8 erfordert einige zusätzliche Überlegungen. Da (A5) aus (A6) folgt und $\rho(0)$ wegen $(\text{Stab}; 0)$ nach Lemma 6.7 kleiner als 1 ist, sind offensichtlich die Voraussetzungen von Theorem 7 erfüllt, so daß die dort bewiesenen Aussagen auch hier richtig sind.

Setzen wir für $(x,\lambda) \in P_{\alpha_0} \times \mathbb{R}_+$

$$G_0(.,.,x,\lambda) := A_0 + \lambda D_\xi f(.,.,S(x,\lambda)(.,.), D_S S(x,\lambda)(.,.))$$

und

$$G_j(.,.,x,\lambda) := \lambda D_{\eta^j} f(.,.,S(x,\lambda)(.,.), D_S S(x,\lambda)(.,.)) \quad \forall 1 \leq j \leq N,$$

so gilt im Einklang mit den Bezeichnungen in § 5. für $y \in Y$ und $(s,t) \in \bar{Q}_T$

$$[G(t, x, \lambda)y](s) = G_0(s, t; x, \lambda)y(s) + \sum_{j=1}^N G_j(s, t; x, \lambda)D_j y(s)$$

$$[g(t, x, \lambda)](s) = f(s, t, S(x, \lambda)(s, t), D_S S(x, \lambda)(s, t))$$

$$[D_\infty(t)y](s) = C_0(s, t)y(s)$$

und

$$[D(t, \lambda)y](s) = (A_0 + \lambda C_0)(s, t)y(s).$$

Da f außerhalb der Diagonalen wachsend ist, erhält man

$$G_0 - \text{diag } G_0 \geq A_0 - \text{diag } A_0, \quad G_j := \text{diag } G_j \quad \forall 1 \leq j \leq N,$$

und aus der über f und σ vorausgesetzten Ungleichung ergibt sich

$$C_0(\cdot, \cdot) \geq \sigma(\cdot) \text{id}_{\mathbb{R}^M}. \text{ Für jedes } t \in (0, T) \text{ folgt somit aus der starken}$$

Quasipositivität von $A_0(t)$, daß auch $G_0(\cdot, t; x, \lambda)$ und $(A_0 + \lambda C_0)(t)$

stark quasipositiv sind. Nach Lemma 6.6 sind folglich $U_{\overline{G}(x, \lambda)}(t, \tau)$ und

$U_{\overline{D}(\lambda)}(t, \tau)$ für $0 \leq \tau < t \leq T$ stark quasipositiv von X nach X_{α_0} .

Die gleiche Argumentation wie im Beweis von Satz 5.14 liefert die Ungleichungen

$$\lambda^* \leq - \frac{\ln p(0)}{\int_0^T \sigma(s) ds}, \quad g(\cdot, x, \lambda) > 0$$

sowie die Aussage, daß es eine in $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M) \times \mathbb{R}$ unbeschränkte Folge

$(x_j, \lambda_j) \in \Sigma_0$ gibt, so daß λ_j gegen die eindeutig bestimmte Zahl

$\lambda_\infty \in (0, \lambda^*)$ konvergiert, für die $r(U_{D(\lambda_\infty)}(T, 0)) = 1$ ist, die wiederum

wegen der starken Positivität von $U_{\overline{D}(\lambda_\infty)}(T, 0)$ dadurch charakterisiert

ist, daß

$$u_t + A(\cdot, \cdot, D)u = (A_0 + \lambda_\infty C_0)u \quad \text{in } Q_T$$

$$B(\cdot, D)u = 0 \quad \text{auf } S_T$$

eine positive T -periodische Lösung besitzt. Daß für jede offene Umgebung

U von λ_∞ die Menge

$\{u \mid u \text{ ist (nichtnegative) } T\text{-periodische Lösung von}$

$$(RWP)_\lambda \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus U\}$$

relativ kompakt in E ist, folgt mit Lemma 6.11 aus der Tatsache, daß

$\Sigma_0 \cap (P_{\alpha_0} \times \mathbb{R}_+ \setminus U)$ relativ kompakt in $X_{\alpha_0} \times \mathbb{R}$ ist (vgl. Beweis von Satz 5.14). Da sich die übrigen Behauptungen von Theorem 8 aus Theorem 5.12 ergeben, ist auch Theorem 8 nachgewiesen.

Beim Nachweis von Theorem 9 haben wir es wieder etwas einfacher, da wir mit Satz 5.14 bereits eine völlig analoge Aussage für Evolutionsgleichungen bewiesen haben. Da f hier keine Gradientenabhängigkeit aufweist, gilt

$$[D_2^+ f_0(t, x)y](s) = [D_\xi f(s, t, x(s), Dx(s))] y(s)$$

für alle $(t, x) \in [0, T] \times P_Y$ und $y \in Y$, womit sich die in Satz 5.14 über $D_2^+ f_0(t, x)$ vorausgesetzte Ungleichung sofort aus (A8) ergibt. Wählen wir nun

$$e := \|U_{D_0}(T, 0) \mathbb{1}^M\|_{X_{\alpha_0}}^{-1} U_{D_0}(T, 0) \mathbb{1}^M,$$

$$\gamma := \max_{(s, t, \xi) \in \overline{Q}_T \times \rho \overline{B}^+_{\mathbb{R}^M}} |f(s, t, \xi) - C_0(s, t)\xi + y(s, t)|$$

$$\text{und } h(\beta) := \gamma \chi_{(\beta e)^{-1}(\rho \overline{B}^+_{\mathbb{R}^M})} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}_+,$$

so können wir für $x \in \beta e + P_{\alpha_0}$ und $(s, t) \in \overline{Q}_T$

$$\begin{aligned} & [f_0(t, x) - D_\infty(t)x + y(t)](s) \\ & \leq \chi_{x^{-1}(\rho \overline{B}^+_{\mathbb{R}^M})}(s) [f(s, t, x(s)) - C_0(s, t)x(s) + y(s, t)] \\ & \leq h(\beta)(s) \end{aligned}$$

abschätzen. Da außerdem

$$\|h(\beta)\|_{O_M^H} = \gamma [\text{meas}(\beta e)^{-1}(\rho \overline{B}^+_{\mathbb{R}^M})]^{1/p}$$

wegen $e(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^M$ (vgl. Lemma 6.6) für $\beta \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert,

besitzt h die in Satz 5.14 vorausgesetzten Eigenschaften. Somit folgt Theorem 9 aus Satz 5.14.

6.12 Bemerkungen:

- (i) Lemma 6.7 ist eine beträchtliche Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Ju. Kolesov, der die entsprechende Aussage im Fall $M = 1$ für den Dirichlet - Randoperator bewies (vgl. [31, Lemma 12, 13]). Sein Beweis ist jedoch nicht ganz vollständig und enthält keine klaren Regularitätsvoraussetzungen an u . Bei der Untersuchung von Stabilitäts- und Instabilitätsfragen erweist sich Lemma 6.7 als ein äußerst nützliches Hilfsmittel.
- (ii) Die Ergebnisse dieses Paragraphen zeigen, daß die Theoreme 2 - 9 nur eine Auswahl von möglichen Anwendungen der in [7] entwickelten allgemeinen Theorie sind. Mit Hilfe der Resultate aus [7] erhält man sehr leicht weitere Ergebnisse über Verzweigungsprobleme und spezielle Typen von Nichtlinearitäten.

Literatur

- [1] R.A. Adams: "Sobolev spaces", Academic press, New York, 1975
- [2] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg: "Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I.", Comm. Pure Appl. Math. XII (1959), 623 - 727
- [3] H. Amann: "Nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach Spaces", Eigenvalues of nonlinear problems, Centro Internazionale Matematico Estivo, Edizioni Cremonese, Roma 1974, 3 - 21
- [4] H. Amann: "Nonlinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions", Proc. of the 2nd Scheveningen Conf. on Diff. Equts., Aug. 1975, ed. Eckhaus, North Holland Amsterdam, 1976
- [5] H. Amann: "Lectures on some fixed point theorems" Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1974
- [6] H. Amann: "Multiple positive fixed points of asymptotically linear maps", J. Functional Analysis 17, (1974) 174 - 213
- [7] H. Amann: "Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach Spaces", SIAM Review 18 (1976) 620 - 709
- [8] H. Amann: "Existence and stability of solutions for semilinear parabolic systems, and application to some diffusion reaction equations", Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh 81A (1978), 35 - 47

- [9] H. Amann: "Invariant sets and existence theorems for semilinear parabolic and elliptic systems", Journal of Math. Anal. and Appl. 65 (1978), 432 - 467
- [10] H. Amann: "Periodic solutions of semilinear parabolic equations", Nonlinear Analysis, L.Cesari et al., Acad. Press, 1978
- [11] R. Aris: "The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts", Clarendon Press, Oxford 1975
- [12] J.W. Bebernes, K. Schmitt: "Invariant sets and the Hukuhara-Kneser property for systems of parabolic partial differential equations", Rocky Mountain J.Math. 7 (1977), 557 - 567
- [13] J.M. Bony: "Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés", Ann. Just. Fourier Grenoble 19 (1969), 277 - 304
- [14] H. Brézis: "On a characterization of flow - invariant sets", Commun. Pure Appl. Math. 23 (1970), 261 - 263
- [15] F.E. Browder: "Nonlinear operators and nonlinear equations of evaluations in Banach Spaces", Proc. Sympos. Pure Math. 18 II Amer. Math. Soc. 1976
- [16] K.N. Chueh, C.C. Conley, J.A. Smoller: "Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations", Indiana Univ. Math. J. 26 (1977), 373 - 392
- [17] M.G. Crandall: "A generalization of Peano's theorem and flow invariance", Proc. Amer. Math. Soc. 36 (1972), 151 - 155

- [18] M.G. Crandall: "An introduction to evolution governed by accretive operators", Dynamical Systems, Vol. 1, An International Sympos., 1976, Acad. Press, Inc.
- [19] J. Czischke: "Semilineare parabolische Differentialgleichungen mit nichtlinearen Randbedingungen", Dissertation, Bochum 1978
- [20] J.L. Daleckiĭ, M.G. Krein: "Stability of solutions of differential equations in Banach Spaces", Transl. Math. Mono. Vol. 43, Amer. Math. Soc. 1974
- [21] K. Deimling: "Ordinary differential equations in Banach Spaces", Lecture Notes in Math. 596, Springer-Verlag 1977
- [22] J. Deuel: "Nichtlineare parabolische Randwertprobleme mit Unter- und Oberlösungen", Diss. No. 5750 ETH, Zürich 1976
- [23] J. Dieudonné: "Deux exemples singuliers d'équations différentielles", Acta Sci. Math. (Szeged) 12B (1950), 38 - 40
- [24] W.E. Fitzgibbon (III), H.F. Walker: "Nonlinear diffusion", Research Notes in Math. 14, Pitman Publishing Limited, London 1977
- [25a] A. Friedman: "Partial differential equations of parabolic type", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964
- [25b] A. Friedman: "Partial differential equations" Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1969
- [26] A. Friedman: "Remarks on nonlinear parabolic equations", Proc. Symp. Appl. Math. 17, AMS, Providence, R. I., (1965), 3 - 23
- [27] E. Hille, R.S. Phillips: "Functional Analysis and Semigroups" Amer. Math. Soc., Providence R.I., 1957

- [28] R.B. Holmes: "A course on optimization and best approximation"
Lecture Notes 257, Springer-Verlag 1972
- [29] G. Jameson: "Ordered linear spaces", Lecture Notes, Vol. 141,
Springer-Verlag, New York, 1970
- [30] T. Kato: "Quasilinear equations of evolution with applications
to partial differential equations", Spectral Theory
and Diff. Equts., Proc. Symp. Dundee 1974, Springer
Lecture Notes 448 (1975), 25 - 70
- [31] Ju. S. Kolesov: "Periodic Solutions of quasilinear parabolic
equations of second order", Trans. Moscow Math.
Soc. 21 (1970), 114 - 146
- [32] M.A. Krasnosel'skii, P.P. Zabreiko, E.I. Pustyl'nik and
P.E. Sobolevskii: "Integral Operators in
spaces of summable functions", Noordhoff,
Leyden, 1976
- [33] M.A. Krasnosel'skii: "Positive solutions of operator equations",
Noordhoff, Groningen, 1964
- [34] M.A. Krasnosel'skii: "The operator of translation along the
trajectories of differential equations",
Transl. Math. Monographs 19, Amer. Math. Soc.,
Providence, R. I., 1968
- [35] M.G. Krein, M.A. Rutman: "Linear operators leaving invariant a
cone in a Banach Space", American Math.
Soc. Transl. 10 (1962), 199 - 325
- [36] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva: "Linear and
quasilinear equations of parabolic type",
Vol. 23, Transl. of Math. Monographs, Amer.
Math. Soc., Providence, R. I., 1968

- [37] J.H. Lightbourne III., R.H. Martin: "Relatively continuous non-linear perturbations of analytical semigroups", Nonlin. Analysis, Theory, Methods & Applications 1 (1977), 277 - 292

- [38] J.E. Marsden, M. McCracken: "The Hopf Bifurcation and its Applications" Applied Math. Sciences 19, Springer-Verlag 1976

- [39] R.H. Martin: "Nonlinear perturbations of linear evolution systems", J. Math. Soc. Japan 29 (1977), 233 - 252

- [40] R.H. Martin: "Invariant sets and a mathematical model involving semilinear differential equations", Nonlin. Equats. in abstract spaces, Acad. Press 1978, 135 - 148

- [41] R.H. Martin: "Nonlinear operators and differential equations in Banach Spaces", Wiley, New York, 1976

- [42] R.H. Martin: "A global existence theorem for autonomous differential equations in a Banach Space", Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970), 307 - 314

- [43] M. Nagumo: "Über die Lage der Integalkurven gewöhnlicher Differentialgleichungen", Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 24 (1942), 551 - 559

- [44] M. Nakao: "On boundedness, periodicity, and almost periodicity of solutions of some nonlinear parabolic equations", Journal of Diff. Equats. 19, 1975, 371 - 385

- [45] A. Ostrowski: "Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung", Band III, Zweite Auflage, Birkhäuser Verlag 1967

- [46] A. Pazy: "Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equations", Univ. of Maryland, Lecture Notes, No. 19, 1974

- [47] A. Pazy: "A class of semilinear equations of evolution", Israel Journal of Math. 20 (1975), 23 - 36

- [48] M.H. Protter, H.F. Weinberger: "Maximum principles in differential equations", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967

- [49] J. Rauch: "Stability of motion for semilinear evolution partial differential equations", Proc. of the NATO Adv. Study Institute held liège, Belgium, Sept. 6 - 17, 1976, D. Reidel Publ. Comp. 1977, 319 - 349

- [50] R.M. Redheffer, W. Walter: "Invariant sets for systems of partial differential equations. I. Parabolic equations", Arch. Rat. Mech. Anal. 67 (1978) 41 - 52

- [51] R.M. Redheffer, W. Walter: "Flow-Invariant sets and differential inequalities in normed spaces", Applic. Anal. 5 (1975) 149 - 161

- [52] H.H. Schaefer: "Topological vector spaces", Springer-Verlag, New York, 1971

- [53] K. Schmitt: "Boundary value problems for quasilinear second order elliptic equations", Nonlinear Anal., Theory, Methods & Appl. 2 (1978), 263 - 309

- [54] P.E. Sobolevskii: "Equations of parabolic type in a Banach Space", Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, Vol.49, Providence R.I., 1966, 1 - 62

- [55] C.T. Taam: "Stability, periodicity, and almost periodicity of solutions of nonlinear differential equations in Banach Spaces", J. Math. Mech. 15 (1966), 849 - 876

- [56] Long-Yi Tsai: "Periodic of nonlinear parabolic differential equations", Dissertation, Utah, 1975

- [57] P. Volkmann: "Gewöhnliche Differentialgleichungen mit quasimonoton wachsenden Funktionen in topologischen Vektorräumen", Math. Zeitschrift 127 (1972), 157 - 164

- [58] P. Volkmann: "Über die Existenz von Lösungen der Differentialgleichung $u' = f(u)$ in einer abgeschlossenen Menge, wenn f eine k -Mengenkontraktion ist", Proc. Conf. on ord. and part. diff. equts., Dundee 1976, Lecture Notes 564, Springer-Verlag 1977

- [59] G.F. Webb: "Continuous nonlinear perturbations of linear accretive operators in Banach Spaces", J. Functional Analysis 10 (1972), 191 - 203

- [60] H.F. Weinberger: "Invariant sets for weakly coupled parabolic and elliptic systems", Rend. Mat. 8 (1975), 295 - 310

LEBENS LAUF

Geburtsdatum und -ort:	23.02.1949 in Höxter
Eltern:	Hermann Knoke und Hildegard Knoke geb. Larosch
Familienstand:	verheiratet seit dem 03.09.1974 mit Christa Knoke, geb. Kattwinkel
Grundschule:	April 1955 - Februar 1957 Katholische Volksschule in Höxter Februar 1957 - April 1959 Swidbertschule in Wattenscheid
Gymnasium:	April 1959 - Juli 1967 Städt. Jungengymnasium Wattenscheid
Studium:	WS 1967/68 - SS 1974 Mathematik, Elektrotechnik und Wirtschaftswissenschaften an der Ruhr-Universität Bochum (Diplom SS 1974)
Zivildienst:	Oktober 1974 - Januar 1976
Tätigkeit:	01.03.1976 - 30.04.1976 wiss. Hilfskraft 01.05.1976 - 30.04.1979 wiss.Ass.m.d.V.b. seit 01.05.1979 wiss. Hilfskraft an der Abteilung Mathematik (Lehrstuhl VII) an der Ruhr-Universität Bochum

lifo
druck

laubanger 15
8600 bamberg
tel.: 0951/6 4321